Russian Academy of Sciences
Institute of Philosophy

S.A.Pavlov

LOGIC
WITH TRUTH & FALSEHOOD OPERATORS

Moscow
2004

Российская Академия Наук
Институт философии

С.А.ПАВЛОВ

ЛОГИКА С ОПЕРАТОРАМИ ИСТИННОСТИ И ЛОЖНОСТИ

Москва
2004

УДК 161.12+164
ББК 87.4
П-12

В авторской редакции

Рецензенты:
доктор филос. наук *И.А.Герасимова,*
доктор филос. наук *Ю.В.Ивлев*

П-12 **Павлов С.А.** Логика с операторами истинности и ложности. – М., 2004. – 143 с.

Монография посвящена одному из важнейших аспектов современных исследований теории истины – логике с операторами и предикатами истинности и ложности. Рассмотрены содержательные, семантические и философские предпосылки построенной логики. Особенность развиваемого в монографии подхода заключается во введении этих операторов как исходных непосредственно в объектный язык логики, а их свойства задаются аксиоматически. Тем самым реализован подход, альтернативный подходу Тарского. Построенная логика позволяет корректно оперировать не только с двухзначным высказываниями, но и с высказываниями, содержащими противоречивую и неполную информацию.

Проведены сопоставления и установлены взаимосоотношения полученной логики и ее подлогик с такими логиками как логики Белнапа и фон Вригта, трехзначные логики Клини, Лукасевича, Бочвара, паранепротиворечивые логики Асенхо, Приста, Д'Оттавиано-да Косты.

Монография представляет интерес для специалистов в области логики и ее приложений в философии.

ISBN 5-9540-0002-6

СОДЕРЖАНИЕ

Введение[1]

В начале XXI века проблематика, связанная с исследованием концепций истинности, продолжает оставаться одной из центральных для логики, философии и методологии науки.

Парадоксы, обнаруженные в основаниях теории множеств (Б.Расселом и другими), затронули и классическую концепцию истины, восходящую к Аристотелю. Подразделение известных парадоксов на логические и семантические было предложено Ф.Рамсеем.

Начало прошлого XX века характеризуется активной исследовательской работой в области как оснований математики, так и логики. При этом были подвергнуты критике традиционные законы логики (Л.Брауэр, Н.Васильев, Я.Лукасевич, К.Льюис). Эти исследования, а также ряд проблем, возникших в связи с семантическими парадоксами, привели к созданию неклассических логик и новых подходов к концепции истины.

Современный подход к теории истины обычно связывают с семантической теорией истины Тарского. В ней А.Тарский предложил общий метод построения формально корректного определения понятия «быть истинным предложением» для ряда формализованных языков.

Обнаруженные А.Тарским проблемы, связанные с определением истины для «достаточно богатых» языков, побуждали исследователей искать новые пути развития концепции истины. Интересные, многообещающие и оригинальные подходы содержатся в работах С.Крипке, Н.Белнапа, фон Вригта. Идея Н.Васильева о различении логики и металогики, то есть двухуровневых логик, продолжала развиваться в работах А.Арруды, В.А.Смирнова. К ней примыкает идея Д.Бочвара о различении внешних и внутренних связок. Идеи С.Крипке связаны как с использованием частично определенного предиката истины, так и с семантикой возможных миров.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18287.

Один из подходов к проблеме истинности и ложности, позволяющий выявить целый ряд важных аспектов этой проблемы, связан с использованием многозначных логик. Начало такому подходу положено Д.Бочваром.

Задачи, поставленные в связи с разработкой и применением искусственного интеллекта, которые имеют отношение к обрабатываемой информации и поэтому актуальные для развития современных компьютерных систем, заставляют по-новому взглянуть на проблемы истинности и ложности.

Существует ли определение термина «истинное предложение»? Несмотря на многочисленные исследования в этой области, до сих пор актуальным остается проблема рассмотрения термина «истинное предложение» в общем случае. Это попрежнему открытый вопрос, на который не получен общепризнанный ответ. Определение предиката истины имеется только для ряда частных случаев формализованных языков.

Этот вопрос может быть поставлен иначе:
«Как употребляются в языке понятия истинности и ложности?»,
или в более формальном виде:
«Как употребляются в языке *логики* понятия истинности и ложности?».

Таким образом, обоснование и построение логики с предикатами и операторами истинности и ложности, учитывающей и содержательно и формально основные положения и следствия вышеуказанных концепций и логик, представляется вполне актуальным.

Как уже отмечалось выше, исследование проблемы истины восходит своими корнями к античности. Так, уже софистами в античности был сформулирован в числе других парадокс лжеца. Подход к определению истины у Аристотеля задал ее понимание [*Аристотель* 1976] «истину говорит тот, кто считает разъединеное разъединенным и связанное связанным, а ложное – тот, кто думает обратно тому, как дело обстоит с вещами» и стал доминирующим в последующие века.

В начале XX века в логике и математике были открыты новые типы парадоксов, существенным образом затронувших основные положения наивной теории множеств, заставившие поновому взглянуть на проблему истины и сыгравшие важную роль в развитии логики (в первую очередь – логико-семантических исследований и неклассических логик).

Новый этап в исследовании и развитии концепции истины связан с теорией истины Тарского [*Tarski A.* 1933], сразу ставшей классической. В ней А.Тарский установил, что существенными предпосылками, приводящими к семантическим антиномиям, являются:

(I) семантически замкнутый язык,

(II) допущение, что в этом языке действуют обычные законы логики.

Поэтому, чтобы не допустить появления парадоксов, он принял решение не пользоваться семантически замкнутым языком. Вместо последнего он использовал два разных языка – объектный язык и метаязык. Объектный язык он предложил отделить от метаязыка, тем самым сделав невозможным появление семантических парадоксов типа парадокса лжеца.

Сам А.Тарский утверждал, что основной результат его исследования заключается в следующем: необходимое условие для удовлетворительного определения истины в метаязыке состоит в том, что метаязык должен «быть существенно богаче» объектного языка. В случае невыполнения этого условия термин «истинно» необходимо включить в список неопределяемых терминов метаязыка, а фундаментальные свойства понятия истины задавать аксиоматически.

Многие исследователи согласились с тем, что при проведении логических исследований необходимо различать объектный язык и метаязык, и, в дополнение к этому, логики этих двух типов языков могут быть разными. Идея двух уровней логики была намечена уже Н.Васильевым.

Различные пути построения концепции истины могут быть классифицированы в зависимости от того, какие логики принимаются для объектного языка и метаязыка, а также какой подход был избран: дефинициальный или аксиоматический.

Поскольку формулы языка логики, как содержащие, так и не содержащие семантические предикаты, могут рассматриваться как классически так и неклассически, то имеется 4 варианта их рассмотрения. Перечислим эти варианты, записывая предложение «Формулы языка логики, не содержащие семантические предикаты, рассматриваются классически» сокращенно как «не семантические – классически» и т.д. Язык может характеризоваться, по крайней мере, двумя уровнями: уровнем объектного языка и уровнем метаязыка.

1) семантические – классически,
не семантические - классически.

2) семантические – классически,
не семантические - неклассически.

3) семантические – неклассически,
не семантические - классически.
4) семантические – неклассически,
не семантические - неклассически.

Теория истины Тарского может быть отнесена к первому варианту, к нему же относится концепция Гупта-Херцбергера.

О втором варианте имеет смысл говорить, когда для формул объектного языка применяется неклассическая логика, а для формул метаязыка – классическая логики. Такая трактовка метаязыка была принята в той или иной форме рядом логиков. Она обнаруживается в трехзначной логике Лукасевича для формул с модальными операторами Lp и Mp; в логике Бочвара для формул $\vdash$p и 7p; в формализованной А.Аррудой логике Васильева V1 для формулы $\neg$p; в принципах введения значений истинности, предложенных А.А.Зиновьевым для метавысказываний о значениях истинности ($P \leftarrow v$); в системе интенсионального следования Войшвилло для формул метаязыка Tp/α и Fp/α; в метатеории логик первопорядкового следования Попова для формул метаязыка T_1p и F_1p; в логиках истины фон Вригта для формулы Tp; в комбинированном исчислении высказываний и событий Смирнова для формулы θp в системе CM.

Из многозначных интерпретаций для логик, принимающих такую трактовку метаязыка, выделим четырехзначные интерпретации. Так, фон Вригт для логики истины принимает четыре значения («univocally true», «univocally false», «true and false», «neither true nor false»). В исследованиях по искусственному интеллекту Н.Белнап в статье «Как нужно рассуждать компьютеру» предлагает оценивать поступающую в компьютер информацию в терминах истины и лжи, используя четыре оценки: только истинно, только ложно, оба (и то и другое), ни одно (ни то, ни другое), обозначенные как T, F, B, N. Для двух последних значений имеются определенные аналогии с пресыщенными оценками и истиннозначными провалами в семантике возможных миров.

Отмечается также, что в индийской логике имеется традиция рассматривать тезис с четырех сторон (чатушкотика), как, например, в знаменитом вопросе к Будде «Мир или вечен, или невечен, или вечен и невечен, или ни вечен, ни невечен?».

Таким образом, идеи логик с четырехзначной интерпретацией и сходными по смыслу значениями истинности имеются как у древних, так и у современных мыслителей, как на Востоке, так и на Западе. Подобные логики могут предназначаться для рассуждений как естественного, так и искусственного интеллекта.

В подходе Крипке-Фефермана-Гилмора допускается использование предиката истины как частично определенного; формулы языка логики, не содержащие семантических предикатов, рассматриваются ими классически, чем реализуется третий вариант.

К четвертому варианту относятся логические системы IM, IHW построенные В.А.Смирновым в комбинированном исчислении высказываний и событий.

В исследованиях Е.Д.Смирновой, использующей семантику возможных миров, рассматриваются по отдельности все четыре указанных выше варианта.

Особенностью развиваемой в монографии концепции истины и строящейся на ее основе логики является то, что предикаты и операторы истинности и ложности включены в объектный язык исчисления. В этом состоит отличие от подходов, требующих отделения терминов, имеющих метаязыковое происхождение, от языка-объекта. Предикат истинности не определяется, а его основные свойства задаются системой аксиом. Логика с предикатами и операторами истинности и ложности характеризуется также тем, что в ней к высказываниям, префиксированным операторами истинности и ложности применима классическая логика, в то время как к произвольным высказываниям применима неклассическая логика. Тем самым предлагаемая в монографии логика с предикатами и операторами истинности и ложности рассматривается в рамках второго варианта, при этом учитываются и другие подходы.

Автор приносит благодарность коллегам за стимулирующие обсуждения, критические замечания и интерес к высказанным идеям А.М.Анисову, П.И.Быстрову, В.Л.Васюкову, И.А.Герасимовой, Г.В.Гриненко, А.А.Зиновьеву, Ю.В.Ивлеву, А.С.Карпенко, Е.Е.Ледникову, В.М.Попову, Е.Д.Смирновой, А.В.Чагрову, В.И.Шалаку. В свое время автору помогли Е.А.Сидоренко и В.А.Смирнов.

1. Обогащение классической сентенциальной логики операторами истинности и ложности

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:

Понятия истинности и ложности

Классическая логика и ее интерпретация

Основные содержательные положения логики с операторами истинности и ложности

Формулировка классической сентенциальной логики с операторами истинности и ложности **FL2**

Аксиоматическая теория истины для классической сентенциальной логики

Семантические и несемантические формулировки законов противоречия и исключенного третьего

1.1. Понятия истинности и ложности

В логической семантике имеется ряд концепций и теорий истины. Понятия истинности и ложности рассматриваются в различных подходах и теориях по крайней мере трояким образом в следующих смыслах:

1) как предикат,
2) как оператор
3) как абстрактный предмет или объект.

Пусть выражения 'n_1', 'n_2' является именами предложений 'S_1' и 'S_2' соответственно. Тогда в высказываниях вида "Предложение n_1 истинно", "Предложение n_2 ложно" понятия истинности и ложности выражаются предикатами истинности и ложности.

В высказываниях вида "Истинно, что S_1", "Ложно, что S_2" понятия истинности и ложности выражаются операторами истинности и ложности.

В высказываниях вида "Предложение n_1 означает истину", "Предложение n_2 означает ложь", или более кратко "S_1 есть истина", "S_2 есть ложь", – понятия истинности и ложности рассматриваются как абстрактные предметы: **истина** и **ложь**.

Высказывания различных видов об истинности (ложности) предложений, подчиняющихся классической логике, попарно эквивалентны друг другу. А именно следующие предложения: “Предложение n_1 истинно”, “Истинно, что S_1”, “Предложение n_1 означает истину", “S_1”, – попарно эквивалентны.

Аналогично попарно эквивалентны предложения: “Предложение n_2 ложно”, “Ложно, что S_2”, “Предложение n_2 означает ложь", “неверно, что S_2”.

Однако, если для каких-либо предложений нарушаются принципы и положения классической логики, то нарушаются и вышеуказанные эквивалентности.

Имеет смысл, подобно тому, как это делает Н.Васильев, рассматривать логики двух уровней: на первом уровне законы логики имеют место для предложений, на втором уровне для высказываний об истинности или ложности вида “Предложение n_1 истинно”, “Предложение n_2 ложно”.

Вслед за Тарским, который полагал, что предикат ‘истинно’ относят к предложениям, в данной работе будем исходить из рассмотрения понятий истинности и ложности как предикатов. Символически будем записывать соответствующие высказывания как формулы $T(q(S_1))$, $F(q(S_2))$, где ‘S_1’ и ‘S_2’ – предложения, ‘$q(S_1)$’ и ‘$q(S_2)$’ – имена этих предложений и q – оператор, преобразующий предложения в их имена[1].

Имея дело с понятиями истинности и ложности, необходимо считаться с возможностями встретиться с трудностями их применения и употребления в естественном и формализованном языках. Это трудности связаны:

1) с семантическими парадоксами типа парадокса лжеца,
2) с определением предиката истины,
3) с определением предложения и высказывания.

Начнем обсуждение с первой трудности.

Согласно Тарскому, существенными предпосылками, приводящими к антиномиям, являются следующие:

“(I) Мы неявно предполагаем, что язык, в дополнение к своим выражениям, содержит также имена этих выражений и семантические термины, например, термин «истинно», относящийся к предложениям этого языка. Мы допускаем также, что все предложения, задающие адекватное употребление этого

---

[1] В ряде предыдущих работ автора в качестве оператора, преобразующего предложения в их имена использовалась звездочка *, т.е. если ‘S_1’ и ‘S_2’ – предложения, то ‘S_1*’ и ‘S_2*’ – имена этих предложений.

термина, могут быть сформулированы в нашем языке. Языки, обладающие такими свойствами, мы будем называть «семантически замкнутыми».

(II) Мы предполагаем, что в этом языке действуют обычные законы логики".

Позже А.Гупта [*Gupta A.* 1982] показал, что, в дополнении к этим двум положениям, Тарский подразумевал еще третье:

(III) Язык должен содержать функцию подстановки, выраженную синтаксически.

К парадоксам ведет неограниченное применение понятий истинности и ложности, поэтому во избежание семантических парадоксов наложим ограничение на подстановку в формулу с предикатом истинности.

В качестве имен предложений, подставляемых в формулы $T(n_1)$, $F(n_2)$, ограничимся только такими именами, которые образуются из предложений посредством использования кавычек (т.е. кавычечной функции или оператора (функции) цитирования).

Предложенные ограничения на форму высказываний с термином "истинно", связанные с обязательным использованием функции цитирования, позволяют избежать семантических парадоксов за счет отсутствия операций, позволяющих осуществить автореференцию. В этом подходе не предлагается решение семантических парадоксов. В то же время введенные ограничения не отбрасывают каких либо содержательно значимых высказываний или положений.

1. Таким образом, понятия истинности и ложности будем рассматривать и употреблять только в высказываниях вида:

"Предложение 'S_1' истинно", "Предложение 'S_2' ложно", в которых имена предложений образованы с помощью функции цитирования и в которые вместо S подставляются предложения. Эти высказывания символизируем формулами $T(q(S_1))$ и $F(q(S_2))$.

Термообразующий оператор q исполняет роль функции цитирования и действует подобно квадратным скобкам [ ], которые использует В.А.Смирнов в комбинированном исчислении предложений и событий.

На сходство такого рассмотрения предиката истинности с ограничением на подстановку имен в формулу $T(n)$ (в содержательном смысле, конечно) с частично определенным предикатом истинности в теории истины Крипке [*Kripke S.* 1975], обратил внимание автора В.А.Смирнов.

2) На пути исследования понятия истинности Тарский [*Тарский А.* 1999] пришел к выводу о неопределимости предиката

истинности для достаточно богатых языков. В случае невыполнения необходимого условия для удовлетворительного определения истины в метаязыке, состоящего в том, что метаязык должен «быть существенно богаче» объектного языка, термин «истинно» необходимо включить в список неопределяемых терминов метаязыка, а свойства понятия истины задавать аксиоматически. То есть А.Тарский отмечал, что возможен аксиоматический подход к построению теории истины, альтернативный дефинициальному. Исходя из этого предикат (или оператор) истинности будем в данной работе рассматривать в качестве исходного, неопределяемого логического понятия.

3) Известны трудности, связанные с определением того, что представляет собой высказывание и предложение. На начальном этапе нашего исследования ограничимся классическим случаем двузначных предложений (высказываний).

Так как, следуя Тарскому, будем прилагать предикаты истинности и ложности к предложениям, то для единообразия пропозициональную классическую логику (логику высказываний) будем в дальнейшем рассмотрении называть сентенциальной логикой.

1.2. Классическая логика и ее интерпретация

Приведем одну из стандартных формулировок и интерпретаций классической сентенциальной (пропозициональной) логики **CL**.

Язык логики CL

Алфавит CL:

$s, s_1, s_2, \ldots$ сентенциальные переменные;

$\sim, \supset$ логические константы;

(,) технические символы.

Правила образования ппф

(i) Всякая сентенциальная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A, B есть ппф, то $(\sim A)$, $(A \supset B)$, есть ппф.

(iii) Ничто иное не является ппф.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Метапеременные: $P, P_1, P_2, \ldots$ для ппф.

Схемы аксиом

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3 $((\sim P_1 \supset \sim P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

Правило вывода $\dfrac{P_1, (P_1 \supset P_2)}{P_2}$

Интерпретация

Пусть M есть непустое множество сентенциальных (пропозициональных) переменных. Оценкой множества M называется любое отображение M в $\{1, 0\}$.

Если A есть формула, W(A) есть множество всех сентенциальных переменных, входящих в A, M есть множество сентенциальных переменных такое, что $W(A) \subseteq M$ и v есть оценка множества M, то значение формулы A при v (символически $|A|_v$) определяется индуктивно следующим образом:

1) если A есть сентенциальная переменная q,
то $|A|_v = v(r)$, где $v(r)$ есть значение r при отображении v.

2) если A есть $(\sim B)$, то

$$|\sim B|_v = \begin{cases} 0 \text{ если } |B|_v = 1, \\ 1 \text{ если } |B|_v = 0. \end{cases}$$

3) если A есть $(B \rightarrow C)$, то

$$|B \supset C|_v = \begin{cases} 1 \text{ если } |B|_v = 1 \text{ и } |C|_v = 1, \\ 0 \text{ если } |B|_v = 1 \text{ и } |C|_v = 0, \\ 1 \text{ если } |B|_v = 0 \text{ и } |C|_v = 1, \\ 1 \text{ если } |B|_v = 0 \text{ и } |C|_v = 0. \end{cases}$$

Формулу A назовем общезначимой (символически $\models A$), если для всякого множества сентенциальных переменных M такого, что $W(A) \subseteq M$, и всякой оценки v множества M, $|A|_v = 1$.

Другими словами, мы сопоставляем формулы языка сентенциального исчисления формулам булевой алгебры.

Соответствующая алгебра будет $<\{0, 1\}, -, \leq>$.

В метаязыке M^1 для языка логики **CL** можно построить определение предиката истины T^1 для ппф языка логики **CL** в данной интерпретации.

Пусть имена в M^1 для ппф языка логики **CL** строятся с помощью оператора q, эквивалентность метаязыка обозначается символом $\Leftrightarrow$, а перевод ппф P совпадает с самой P.

Тогда из определения предиката истины будут следовать все частные случаи T-эквивалентности, имеющие в данном случае следующий вид:

$T^1(\mathrm{q}(\mathrm{P})) \Leftrightarrow \mathrm{P}$.

Логика языка и логика метаязыка здесь классические. Так как язык и метаязык в силу своей ограниченности выразительных средств не включают в себя и в них не выразима функция подстановки, то без опасений получения семантических парадоксов можно объединить объект-язык и метаязык. Для ппф объединенного языка, включающего в себя уже ппф вида $T^1(\mathrm{q}(\mathrm{P}))$, можно, в свою очередь, построить определение предиката истины T^2 в метаязыке M^2 следующего порядка.

Таким образом без проблем можно построить иерархию метаязыков и в них дать определения соответствующих предикатов истины. То есть для всякого объединения языков до порядка n можно построить соответствующее определение предиката истины $T^{n+1}(\mathrm{q}(\mathrm{P}))$, но нельзя построить определение предиката истины для объединения всех языков такой иерархии.

Поэтому имеет смысл перейти от дефинициального подхода к аксиоматическому. При этом предикат истины вводится в объектный язык исчисления, а его свойства задаются аксиоматически. Другими словами, он определяется неявно.

Существенно при этом, чтобы T-эквивалентность являлась теоремой построенного исчисления.

Перейдем к построению логики, язык которой будет включать в себя предикаты истинности и ложности.

1.3. Основные содержательные положения логики с операторами истинности и ложности

Предикаты истинности и ложности связаны между собой следующими соотношениями:

$T(\mathrm{q}(\mathrm{A})) \quad \Leftrightarrow F(\mathrm{q}(\sim\mathrm{A}))$

$T(\mathrm{q}(\sim\mathrm{A})) \Leftrightarrow F(\mathrm{q}(\mathrm{A}))$

В данном рассмотрении особенности оператора цитирования явно не фигурируют. Поэтому имеют смысл следующие сокращения:

$|\mathrm{A} =_{\mathrm{df}} T(\mathrm{q}(\mathrm{A}))$ (сокращение для оператора истинности),

$-A =_{df} F(q(A))$ (сокращение для оператора ложности).

Так как предикат (и аналогично оператор) истинности определяется через предикат ложности и отрицание, достаточно в качестве исходного взять только оператор ложности.

Таким образом понятия истинности и ложности будут в формальной системе играть роль логических операторов. И эти операторы итерируются.

Также принимаем следующие положения:

1) для формул, префиксированных операторами истинности и ложности, имеет место классическая логика,

2) импликация определяется традиционно, то есть условия истинности для импликации будем задавать следующим образом.

Предложение "если S_1, то S_2" будем записывать символически ($S_1 \rightarrow S_2$). Будем полагать, что

предложение '($S_1 \rightarrow S_2$)' истинно, если и только если
'S_1' ложно или 'S_2' истинно,

и предложение '($S_1 \rightarrow S_2$)' ложно, если и только если
'S_1' истинно и 'S_2' ложно.

3) формулы классической сентенциальной логики двузначны.

Перейдем к формулировке классической логики с операторами истинности и ложности, которую будем обозначать как **FL2**. Операторы истинности и ложности будем обозначать символами |, – соответственно, исходную импликацию обозначим как $\rightarrow$.

1.4. Формулировка классической сентенциальной логики с операторами истинности и ложности FL2

Язык исчисления FL2

Алфавит FL2: $s, s_1, s_2, \ldots$ сентенциальные переменные;
$-, \rightarrow$ логические константы, обозначающие оператор ложности и импликацию;
(,) технические символы.

Правила образования ппф

(i) Всякая сентенциальная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A, B есть ппф, то $(-A)$, $(A \rightarrow B)$, есть ппф.

(iii) Ничто иное не является ппф.

Примем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие **сокращения** для формул.

Определим формулу f(s), являющуюся тождественно ложной.

D1.1.1. $f(s) =_{df} -(-s \to -s)$ ("ложь").

Формула f(s) выражает ложность рефлексивности импликации для формулы (–s). Последнее же есть ложь. Поэтому эта формула далее будет играть роль константы "ложь".

Определим отрицание ~.

D1.1.2. $\sim A =_{df} (A \to f(s))$ (отрицание).

Определим конъюнкцию &, дизъюнкцию V и эквиваленцию ↔ классическим образом.

D1.2.1. $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \to \sim B)$,
D1.2.2. $(A \vee B) =_{df} (\sim A \to B)$,
D1.2.3. $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \to B) \,\&\, (B \to A)$.

Высказывание об истинности предложения А рассматривается как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения А. Для высказывания об истинности предложения А ('|' содержательно означает 'есть истинно'):

D1.3.1. $|A =_{df} -\sim A$.

Для высказывания о строгой истинности предложения А:
'⌈' содержательно означает 'есть истинно и неложно'.

D1.3.2. $\lceil A =_{df} -(|A \to -A)$.

Определим импликацию ⊃, которую назовем D-импликацией, и ряд производных связок.

D1.4.1. $(A \supset B) =_{df} (\lceil A \to \lceil B)$,
D1.4.2. $(A \wedge B) =_{df} -(A \supset -B)$,
D1.4.3. $(A \vee B) =_{df} (-A \supset B)$,
D1.4.4. $(A \equiv B) =_{df} ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$,
D1.4.5. $(A \veebar B) =_{df} ((A \vee B) \wedge -(A \wedge B))$.

Из всего класса ппф выделим подкласс формул, которые образованы из префиксированных операторами истинности или ложности формул (называемыми в дальнейшем T.F.-формулами (T.F.-ф.)).

(iv) Если А есть ппф, то (–А) есть T.F.-ф.
(v) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \to P_2)$, есть T.F.-ф.

Метапеременные: А, В, С, ... для ппф;
$P, P_1, P_2, \ldots$ для T.F.-ф.

Имеем 3 группы аксиом:
1) аксиомы классической логики для T.F.-формул (**A1.1.-A1.3.**).
2) аксиомы, выражающие условия истинности для импликации (**A2.1.-A2.2.**),
3) аксиома, выражающая принцип двузначности (**A3.**).

Схемы аксиом

A1.1. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$
A1.2. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$
A1.3. $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

Впредь для определенности эту группу аксиом будем называть A_{CL}. К схемам аксиом A_{CL} добавим следующие специальные схемы аксиом.
A2.1. $|(A \to B) \equiv (-A \vee |B)$ (условие истинности импликации)
A2.2. $-(A \to B) \equiv (|A \wedge -B)$ (условие ложности импликации)
A3. $(|A \veebar - A)$ (принцип бивалентности)

Правило вывода $\dfrac{A, (A \supset B)}{B}$

Определение вывода стандартное

В формулировке данного исчисления используются два сорта метапеременных: для ппф языка исчисления и T.F.-формул.

Для каждого сорта переменных можно поставить вопрос о том к какой логике относятся теоремы, в формулировке которых присутствуют те или иные сорта метапеременных.

Для T.F.-формул имеем следующую метатеорему.

MT1. Логика со схемами аксиом A_{CL} является подсистемой **FL2** и является классической логикой.

Будем обозначать ее **CL**$(-,\supset)$, или кратко **CL**.

Доказательство

Схемы аксиом A_{CL} вместе с производным правилом вывода

$$\frac{P_1, (P_1 \supset P_2)}{P_2}$$

и метапеременными для T.F.-формул P, P_1, P_2, ... являются формулировкой классической логики **CL**.

Следующие теоремы классической логики **CL**, а также производные правила вывода будут использоваться в доказательствах теорем **FL2**.

T1.1.1. $(P_1 \veebar P_2) \equiv (P_1 \equiv - P_2)$

T1.1.2. $P \equiv - - P$

T1.1.3. $-(P_1 \wedge P_2) \equiv (-P_1 \vee - P_2)$

T1.1.4. $-(P \wedge - P)$

T1.1.5. $P \equiv P$

T1.1.6. $-P_1 \supset (P_2 \equiv (P_2 \vee P_1))$

T1.1.7. $(P_1 \wedge P_2) \supset P_1$

T1.1.8. $(P_1 \wedge P_2) \supset P_2$

T1.1.9. Теорема о замене эквивалентным. (для T.F.-формул)
Если T.F.-*ф.* B *получается из* T.F.-*ф.* A *подстановкой* T.F.-*ф.* N *вместо всех или некоторых вхождений* T.F.-*ф.* M *в* T.F.-*ф.* A, *то*
если $\vdash (M \equiv^S N)$, *то* $\vdash (A \equiv^S B)$.

Правило замены эквивалентным (сокращенно п.з.э.), следующее из последней теоремы T1.1.9.

Теоремы **FL2**

T1.2.1. $|P \equiv P$ (T-эквивалентность для T.F.-формул)

Доказательство

1. $(|P \veebar - P)$	A3.
2. $(|P \veebar - P) \equiv (|P \equiv - - P)$	T1.1.1.
3. $(|P \equiv - - P)$	1, 2, MP
4. $(|P \equiv P)$	3, T1.1.2., п.з.э.

Следствием T1.2.1. является следующая теорема. Отметим, что ппф $|A$ есть T.F.-ф.

T1.2.2. $||A \equiv |A$ (итерация оператора истинности)

Следующая теорема выявляет содержательный смысл оператора строгой истинности $\lceil$ («истинно и неложно»), приведенный в комментарии к его определению в D1.3.2.

T1.3.1.1. $\lceil A \equiv (|A \wedge - -A)$.

Доказательство

1. $-(|A \rightarrow -A) \equiv (||A \wedge - -A)$	A2.2.
2. $\lceil A \equiv (||A \wedge - -A)$	1, D1.3.2.
3. $\lceil A \equiv (|A \wedge - -A)$	2, T1.2.2., п.з.э.

T1.3.1.2. $-\lceil A \equiv (-|A \vee -A)$.

Доказательство

1. $-\lceil A \equiv -\lceil A$	T1.1.5.
2. $-\lceil A \equiv -(|A \wedge - -A)$	1, T1.3.1.1., п.з.э.
3. $-\lceil A \equiv (-|A \vee - - -A)$	2, T1.1.3., п.з.э.

4. $-\ulcorner A \equiv (-|A \vee -A)$ 3, T1.1.2., п.з.э.

Имеем теоремы, выражающие законы противоречия и исключенного третьего в семантической формулировке

T1.3.2.1. $(|A \vee -A)$

T1.3.2.2. $-(|A \wedge -A)$

Доказательства

1. $(|A \veebar - A)$ A3.
2. $(|A \vee -A) \wedge -(|A \wedge -A)$ 1, D1.4.5.
3. $((|A \vee -A) \wedge -(|A \wedge -A)) \supset (|A \vee -A)$ T1.1.7.
4. $(|A \vee -A)$ 2, 3, MP
5. $((|A \vee -A) \wedge -(|A \wedge -A)) \supset -(|A \wedge -A)$ T1.1.8.
6. $-(|A \wedge -A)$ 2, 5, MP

Исследование логики ложности естественно включает теорему о ложности лжи, в которой оператор ложности применяется к формуле f(s), определенной в D1.1.1 и о которой, следуя Фреге, можно говорить, что она обозначает абстрактный предмет ложь.

T1.3.3. $-f(s)$.

Доказательство

1. $-(-s \wedge --s)$ T1.1.4.
2. $|-s \equiv -s$ T1.2.1.
3. $-(|-s \wedge --s)$ 1, 2, п.з.э.
4. $-(-s \rightarrow -s) \equiv (|-s \wedge --s)$ A2.2.
5. $--(-s \rightarrow -s) \equiv --(-s \rightarrow -s)$ T1.1.5.
6. $--(-s \rightarrow -s) \equiv -(|-s \wedge --s)$ 4, 5, п.з.э.
7. $--(-s \rightarrow -s)$ 3, 6., MP
8. $-f(s)$ 7, D1.1.1.

Высказывание о ложности предложения A эквивалентно высказыванию об истинности отрицания предложения A.

T1.3.4. $|{\sim}A \equiv -A$.

Доказательство

1. $-f(s) \supset (-A \equiv (-A \vee f(s)))$ T1.1.6.
2. $-A \equiv (-A \vee f(s))$ 1, T1.3.3., MP
3. $|f(s) \equiv f(s)$ T1.2.1.
4. $-A \equiv (-A \vee |f(s))$ 2, 3, п.з.э.
5. $|(A \rightarrow f(s)) \equiv (-A \vee |f(s))$ A2.1.
6. $|(A \rightarrow f(s)) \equiv -A$ 4, 5, п.з.э.
7. $|{\sim}A \equiv -A$ 6, D1.1.2.

Доказательства последующих теорем **FL2** (T1.5.1. - T1.5.2., T1.6.1. - T1.6.5. и далее) приведены в Приложении 1. Также ряд теорем **CL**, нумеруемых как T1.4.1. - T1.4.7., которые будут использоваться в доказательствах теорем **FL2** приведены в Приложении 1.

T1.5.1. $P \equiv \lceil P$

T1.5.2. $(|A \supset A)$

Построенное исчисление **FL2** дедуктивно эквивалентно классической логике. Для доказательства метатеоремы об эквивалентности исчисления **FL2** классической сентенциальной логике необходимо предварительно доказать ряд теорем:

T1.6.1. $(A \to (B \to A))$,

T1.6.2. $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$,

T1.6.3. $((\sim A \to \sim B) \to (B \to A))$,

вывести следующее производное правило вывода

$$\frac{A, (A \to B)}{B}$$

с помощью теоремы

T1.6.4. $(A \to B) \supset (A \supset B)$,

а также доказать

T1.6.5. $-A \leftrightarrow \sim A$.

Будем сравнивать между собой исчисление **FL2**, в алфавит которого входят множество сентенциальных переменных, а также логические константы $-$ и $\to$, которое будем обозначать как **FL2**$(-,\to)$, и классическую сентенциальную логику, задаваемую следующим образом. В ее алфавит входят множество сентенциальных переменных, таких же как и в алфавите **FL2**$(-,\to)$, а также логические константы $\sim$ и $\to$ (отрицание и импликация). Будем ее обозначать как **CL**$(\sim,\to)$.

МТ2. Исчисление **FL2**$(-,\to)$ дедуктивно эквивалентно классической сентенциальной логике **CL**$(\sim,\to)$.

Доказательство

Сентенциальные переменные в **FL2**$(-,\to)$ и **CL**$(\sim,\to)$ совпадают. Правила образования **FL2**$(-,\to)$ и **CL**$(\sim,\to)$ являются взаимно производными.

Всякая аксиома **CL**$(\sim,\to)$ есть теорема **FL2**$(-,\to)$ (T1.6.1.-T1.6.3.) и правило вывода в **CL**$(\sim,\to)$ является производным правилом вывода в **FL2**$(-,\to)$. Следовательно, и всякая теорема

CL($\sim,\to$) есть теорема **FL2**($-,\to$). Запишем полученное отношение логик символически

$$\mathbf{FL2}(-,\to) \Rightarrow \mathbf{CL}(\sim,\to).$$

Докажем аналогичное отношение в обратную сторону.

Введем определение оператора ложности в языке **CL**($\sim,\to$)

D1.5. $-A =_{df} \sim A$,

в соответствии с теоремой T1.6.5. Далее вводим все определения и правила образования как в **FL2**($-,\to$).

Далее получаем, что всякая аксиома **FL2**($-,\to$) есть теорема **CL**($\sim,\to$) и правило вывода в **FL2**($-,\to$) является производным правилом вывода в **CL**($\sim,\to$). Доказуемость необходимых теорем легко проверяется табличным способом, так как **CL**($\sim,\to$) есть классическая логика.

$$\mathbf{CL}(\sim,\to) \Rightarrow \mathbf{FL2}(-,\to).$$

Интерпретация языка логики FL2

Имеем два истинностных значения T, F (истина, ложь). Выделенное значение T.

Таблицы истинности для исходных и определенных выше связок:

A	$-A$	f(s)	$\sim A$
T	F	F	F
F	T	F	T

$\to$	T	F
T	T	F
F	T	T

A	$\mid A$	$\ulcorner A$
T	T	T
F	F	F

$\supset$	T	F
T	T	F
F	T	T

МТ3. Исчисление **FL2** непротиворечиво и семантически полно относительно данной интерпретации.

Доказательство стандартное, опираясь на МТ2.

1.5. Аксиоматическая теория истины для классической сентенциальной логики

Представляет интерес теорема, устанавливающая тождество ппф A и префиксированной оператором истинности ппф $\mid A$.

Формула, выражающая эту теорему, подобна Т-эквивалентности (T('A') $\leftrightarrow$ A) или, другими словами, схеме Тарского.

T1.7.1. $|A \leftrightarrow A$

Это положение вместе с условиями истинности для импликации, выраженными в аксиомах A2.1., A2.2. и с условиями истинности для отрицания, выраженными в нижеследующих эквивалентностях

$|\sim A \equiv - A$ (T1.3.4.)

$- \sim A \equiv |A$ (по D1.3.1.)

являются по сути основными положениями аксиоматической синтаксической теории истины для классической сентенциальной логики. К ним присоединяются также ряд положений для T.F.-формул:

T1.8.1.1: $|(P_1 \supset P_2) \equiv - P_1 \vee | P_2$

(условие истинности D-импликации)

T1.8.1.2. $- P_1 \vee | P_2 \equiv - P_1 \vee P_2$

T1.8.2.1. $-(P_1 \supset P_2) \equiv | P_1 \wedge - P_2$

(условие ложности D-импликации)

T1.8.2.2. $| P_1 \wedge - P_2 \equiv P_1 \wedge - P_2$

А также условия истинности для отрицания T.F.-ф.

$| \sim P \equiv - P$,

$- \sim P \equiv | P$ или иначе $- \sim P \equiv P$.

Поэтому имеет смысл дать другую формулировку **FL2**, среди аксиом которой явно присутствует Т-эквивалентность. Обозначим такую формулировку **FL2**$_{T\leftrightarrow}$.

Исчисление FL2$_{T\leftrightarrow}$

В исчислении **FL2**$_{T\leftrightarrow}$ используется тот же алфавит, правила построения, сокращения формул, правило вывода как и в **FL2**. Отличие заключается в том, что вместо аксиомы **A3**, выражающей принцип бивалентности, принимаются две аксиомы **A1.4.** и **A3**$_{T\leftrightarrow}$, выражающие Т-эквивалентность, как для T.F.-формул, так и для ппф.

Отметим, что необходимость введения двух аксиом, выражающих Т-эквивалентность, показывает, что принцип бивалентности, выражаемый формулой ($|A \veebar - A$) сильнее Т-эквивалентности, выражаемой формулой ($|A \leftrightarrow A$).

Схемы аксиом $\mathbf{FL2}_{T\leftrightarrow}$

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3 $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.4 $|P \equiv P$ (Т-эквивалентность для T.F.-ф.)

A2.1. $|(A \rightarrow B) \equiv -A \vee |B$

A2.2. $-(A \rightarrow B) \equiv |A \wedge -B$

$\mathbf{A3}_{T\leftrightarrow}$ $(|A \leftrightarrow A)$ (Т-эквивалентность)

Теоремы $\mathbf{FL2}_{T\leftrightarrow}$

T1. 9.1. $P \equiv \ulcorner P$

Доказательства теорем T1.9.1.-T.1.11.3. приведены в Приложении 1.

T.1.9.2. $(A \supset |A)$

T.1.9.3. $(A \supset --A)$

T1.9.4. $|\sim A \equiv - A.$

T.1.10.1. $|(A \rightarrow |A)$

T.1.10.2. $--(|A \rightarrow A)$

1.6. Семантические и несемантические формулировки законов противоречия и исключенного третьего

Представляется важным рассмотреть утверждение А.Тарского [*Tarski A.* 1933], что «к едва ли не наиболее важным выводам общей природы, вытекающим из определения истины, следует причислить *принцип противоречивости* и *принцип исключенного третьего*».

Теоремы, выражающие законы противоречия и исключенного третьего в семантической и несемантической формулировках.

T.1.11.1. $-(|A \wedge -A)$

T.1.11.2. $(|A \vee -A)$

T.1.11.3. $(|A \veebar - A)$ (принцип бивалентности)

После доказательства того, что принцип бивалентности является теоремой $\mathbf{FL2}_{T\leftrightarrow}$, нетрудно доказать метатеорему о эквивалентности исчислений **FL2** и $\mathbf{FL2}_{T\leftrightarrow}$.

MT4. $\mathbf{FL2} \Leftrightarrow \mathbf{FL2}_{T\leftrightarrow}$

Имеем также теоремы, выражающие законы противоречия и исключенного третьего:

T.1.12.1. $\sim(A \& \sim A)$

T.1.12.2. $(A \vee \sim A)$

Тем самым показано, что в предложенной формулировке классической логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно», выражаются и являются справедливыми семантические законы противоречия и исключенного третьего наряду с их несемантическими формулировками.

На необходимость различения как семантических законов противоречия и исключенного третьего, так и родственных им законов противоречия и исключенного третьего, не включающих в себя термин «истинно» обращали внимание еще Н.А.Васильев [*Васильев Н.А.* 1912], А.Тарский [*Tarski A.* 1933], и Я.Лукасевич [*Łukasiewicz J.* 1961].

Так Н.А.Васильев в своих работах отделял металогику от эмпирической логики и, соответственно, различал две формулировки закона противоречия. 1-я формулировка этого закона, принадлежащая металогике, гласит: «Нельзя объявлять одно и то же суждение истинным и ложным». Символически записываем в языке логики с символами предикатов истинности и ложности T и F: $\sim(T\text{A} \wedge F\text{A})$. 2-я формулировка закона противоречия гласит: «Закон противоречия высказывает несовместимость утверждения и отрицания». Символически $\sim(\text{A} \wedge \sim\text{A})$. Последняя соответствует формулировке этого закона в классической логике CL.

Также А.Тарский отмечает, что семантические законы противоречия и исключенного третьего не следует отождествлять с родственным ему законами противоречия и исключенного третьего, не включающими в себя термин «истинно».

Я.Лукасевич различал принцип исключенного третьего и «принцип, что *каждое высказывание либо истинно, либо ложно*». Последний он называл «*принципом двузначности*» (принцип бивалентности).

Исходя из развиваемой концепции и теории истины для формул классической сентенциальной логики, построена логика **FL2**, обогащенная операторами истинности и ложности, которая, как было доказано, эквивалентна классической логике. В ней заданы свойства операторов истинности и ложности, а также условия истинности для формул с исходными и производными связками. Поэтому можно говорить, что построенное исчисление является аксиоматической синтаксической теорией истины для классической сентенциальной логики.

Сравнение этой теории с семантической теорией Тарского показывает, что

T2.2.6. $||A \equiv |A$ (итерация оператора истинности)

именно итерацией оператора истинности отличается данная формулировка теории истины от теории истины Тарского, в которой не допускается такая итерация.

Язык логики **FL2** не является семантически замкнутым. Однако можно говорить о замкнутости относительно оператора истинности (Т-замкнутости).

Формулировка исчисления **FL2** сложнее, чем формулировка **CL**, несмотря на их эквивалентность. Возможности этой формулировки проявятся далее, в случае расширения области определения предикатов и операторов истинности и ложности за пределы области двузначных предложений.

На использовании Т-эквивалентности и тем самым возможной элиминации оператора истинности основываются концепции минималистской теории истины и дефляционизма. Недостаточность этих концепций выяснится далее, при обобщении языка логики **FL2**.

2. Обобщение классической логики на область высказываний, не являющихся двузначными

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:
Содержательные положения логики с операторами истинности и ложности в расширенной области
Формулировка логики ложности FL4
Теорема дедукции
Интерпретация языка логики FL4
Непротиворечивость логики FL4
Семантическая полнота логики FL4

Как уже отмечалось, в начале XX века были подвергнуты критике традиционные законы логики. Так, Л.Брауэр, развивая интуиционистский подход, отверг закон исключенного третьего. Я.Лукасевич отверг принцип бивалентности и построил трехзначную логику. Н.Васильев построил воображаемую логику без закона противоречия.

Логические позитивисты в своей критике метафизических суждений, выходящих за рамки верифицируемых положений науки, охарактеризовали такие суждения как бессмысленные. Пример такой критики имеется в работе Р.Карнапа [*Карнап Р.* 1998] «Преодоление метафизики логическим анализом языка».

Предложения метафизики представляют собой простой набор слов, который только выглядит похожим на осмысленные предложения, но это – псевдопредложения.

Они могут возникать двумя путями: 1) в них входят слова, являюшиеся псевдопонятиями, такие как первопричина, безусловное, абсолют, в-себе-бытие, ничто, например:

Ничто первичнее, чем нет и отрицание,

Ничто само сѐбя ничтит,

2) слова, обладающие значением, соединяются между собой с категориальными нарушениями, например:

Цезарь есть простое число.

Р.Карнап и другие неопозитивисты предложили такую классификацию предложений, которая имела целью отделить собственно философскую проблематику от логики и других наук. Их классификация может быть наглядно представлена в следующем виде:

К концу XX века, в связи с задачами искусственного интеллекта, были построены логики, в которых помимо истинных или ложных высказываний были включены в рассмотрение высказывания, содержащие противоречивую и неполную информацию.

Таким образом, многими логиками, философами науки, специалистами в области искусственного интеллекта была отмечена необходимость ввести в рассмотрение рассуждения и высказывания, которые не являются двузначными, как противоречивые высказывания, то есть истинные и ложные, а также высказывания, которые являются ни истинными, ни ложными

2.1. Содержательные положения логики с операторами истинности и ложности в расширенной области

В развиваемом подходе для того, чтобы распространить сферу действия логических отношений на область предложений (высказываний), не являющихся двузначными, достаточно расширить область определения предикатов истинности и ложности на эту область.

Выясним, изменятся или останутся инвариантными вышеуказанные (в части 1) предпосылки аксиоматической теории истины.

Понятия истинности и ложности, как и ранее, будем рассматривать и употреблять только в высказываниях вида:

"Предложение 'S_1' истинно", "Предложение 'S_2' ложно", в которых имена предложений образованы с помощью функции цитирования и в которые вместо S подставляются предложения. Эти высказывания символизируем формулами $T(q(S_1))$ и $F(q(S_2))$.

Соотношения между предикатами истинности и ложности остаются те же:

$T(q(A)) \Leftrightarrow F(q(\sim A))$

$T(q(\sim A)) \Leftrightarrow F(q(A))$

Также остаются и сокращения:

$|A =_{df} T(q(A))$ (сокращение для оператора истинности),

$-A =_{df} F(q(A))$ (сокращение для оператора ложности).

Как и ранее, достаточно в качестве исходного оператора взять только оператор ложности.

Для оператора ложности допускается итерация.

Сохраняют свою силу следующие положения:

1) для формул, префиксированных операторами истинности и ложности, имеет место классическая логика,

2) импликация определяется традиционно.

Только от третьего положения необходимо отказаться. Вместо него принимается следующее положение:

3) формулы рассматриваемой сентенциальной логики не обязательно являются двузначными.

Для того, чтобы реализовать это положение формально, достаточно отбросить аксиому, выражающую принцип двузначности.

Здесь логики для двух уровней будут различаться: для высказываний $T(q(S_1))$ и $F(q(S_2))$ об истинности и ложности предложений S_1 и S_2 будет иметь место классическая логика, а для произвольных предложений S имеет место неклассическая.

Отметим, что подобное соотношение логик для метаязыка и объектного языка имеет место в трехзначной логике Лукасевича для формул с модальными операторами Lp и Mp; в логике Бочвара для формул $\vdash$p и 7p [*Бочвар Д.А.* 1938]; в формализованной А.Аррудой логике Васильева V1 для формулы $\neg$p [*Арруда А.* 1989]; в принципах введения значений истинности, предложенных А.А.Зиновьевым для метавысказываний о значениях истинности $(P \leftarrow v)$ [*Зиновьев А.А.* 1971]; в системе интенсионального следования Войшвилло для формул метаязыка Tp/α и Fp/α [*Войшвилло Е.К.* 1983]; в метатеории логик первопорядкового следования Попова для формул метаязыка T_1p и F_1p [*Попов В.М.* 1979]; в логиках истины фон Вригта для формулы Tp [*Вригт Г.Х. фон* 1986]; в комбинированном исчислении высказываний и событий Смирнова для формулы θp в системе CM [*Смирнов В.А.* 1986].

Перейдем к формулировке языка логики **FL4** с оператором ложности.

2.2. Формулировка логики ложности FL4

Алфавит FL4

$s, s_1, s_2, \ldots$ сентенциальные переменные;

$-, \rightarrow$ логические константы;

(,) технические символы.

Правила образования ппф

(i) Всякая сентенциальная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A , B есть ппф, то $(-A)$, $(A \rightarrow B)$, есть ппф.

(iii) Ничто иное не является ппф.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие **сокращения** для формул.

D2.1.1 $f(s) =_{df} -(-s \rightarrow -s)$ (константа "ложь"),

D2.1.2 $\sim A =_{df} (A \rightarrow f(s))$ (отрицание)

D2.1.3 $|A =_{df} - \sim A$ ('есть истинно')

D2.1.4 $\ulcorner A =_{df} -(|A \rightarrow -A)$ ('есть истинно и неложно')

D2.1.5 $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \to \ulcorner B)$ (D-импликация) которую назовем D-импликацией, так как именно она фигурирует в теореме дедукции.

Зададим правила образования T.F.-формул (T.F.-ф.)

(iv) Если A есть ппф, то $(-A)$ есть T.F.-ф.

(v) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \to P_2)$, есть T.F.-ф.

Пусть $P, P_1, P_2, \ldots$ есть метапеременные для T.F.-ф.

D2.2.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D2.2.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D2.2.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

Схемы аксиом

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3 $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.4 $|P \equiv P$ (редукция оператора истинности для T.F.-ф.)

A2.1 $|(A \to B) \equiv (-A \vee |B)$ (редукция истинности импликации)

A2.2 $-(A \to B) \equiv (|A \wedge -B)$ (редукция ложности импликации)

В связи с формулировкой логики истинности и ложности [*Павлов С.А.* 1979] В.А.Смирнов отметил, что исчисление с аксиомами A1.1-A1.4 является консервативным расширением классической логики с аксиомами A1.1-A1.3.

Правило вывода

$$\frac{A,\ (A \supset B)}{B}$$

Отбрасывание принципа бивалентности ведет к тому, что в полученной логике **FL4** не имеют места традиционные законы логики, такие как закон исключенного третьего, закон противоречия и даже закон тождества.

Исследование свойств полученного исчисления начнем с теоремы о дедукции.

2.3. Теорема дедукции

Одним из важных свойств логических исчислений является наличие решения относительно логического исчисления, язык которой содержит импликацию, вопроса о справедливости для данной логической системы теоремы дедукции относительно данной импликации (в той или иной ее форме).

Понятие вывода из гипотез определяется и обозначается стандартно.

Выводом из гипотез называется всякая последовательность формул $A_1, A_2, ..., A_n$ такая, что для любого i $(1 \le i \le n)$ формула A_i является либо посылкой, либо аксиомой, либо непосредственным следствием одной из предшествующих формул.

Вывод из гипотез Г формулы А обозначается $(\Gamma \vdash A)$. Невыводимость обозначается $(\nvdash)$.

Символы следования в метаязыке в одну и в обе стороны обозначаются соответственно как $(\Rightarrow, \Leftrightarrow)$.

Теорема дедукции будет доказываться относительно импликации $\supset$, а не относительно исходной импликации $\to$. Для последней теорема о дедукции в стандартной форме не проходит, так как несмотря на то, что имеет место

T2.1.1 $(A \vdash A)$,

не имеет места закон рефлексивности импликации (закон тождества)

T2.1.2 $\nvdash (A \to A)$.

Имеем следующие соотношения для импликаций $\to$ и $\supset$:

T2.2.1 $\vdash (A \to B) \supset (A \supset B)$,

T2.2.2 $\nvdash (A \supset B) \supset (A \to B)$.

Также нарушаются и ряд других эквивалентностей, имевших место в **FL2**.

Приведем несколько теорем, которые будут существенно использоваться в доказательстве теоремы дедукции в стандартной форме для системы **FL4**.

T2.3.1 $\vdash (A \supset A)$.

T2.3.2 $\vdash (A \supset (B \supset A))$

T2.3.3 $\vdash (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.

T2.4 $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \supset B)$ (**теорема дедукции**).

Доказательство.

Пусть конечная последовательность формул $B_1, B_2, ..., B_n$ есть вывод из Γ, A и B_n есть B. Индукцией по m $(1 \leq m \leq n)$ докажем, что $\Gamma \vdash (A \supset B_m)$.

Для $m = 1$ имеется один из трех случаев:

1) формула B_1 есть элемент Γ

2) формула B_1 есть аксиома

3) формула B_1 совпадает с A

Исходя из теоремы **T2.3.2** $B_1 \supset (A \supset B_1)$ для случаев 1) и 2) получаем $\Gamma \vdash (A \supset B_1)$

В случае 3) из теоремы **T2.3.1** $(A \supset A)$ имеем $\vdash (A \supset B_1)$ и следовательно $\Gamma \vdash (A \supset B_1)$

Индуктивное допущение (и.д.): $\Gamma \vdash (A \supset B_k)$ для любого $k < m$.

Для B_m имеется один из четырех случаев:

1) формула B_m есть элемент Γ

2) формула B_m есть аксиома

3) формула B_m совпадает с A

4) формула B_m следует по modus ponens из формулы B_i, где $i < m$, и из формулы B_j, где $j < m$ и формула B_j имеет вид $B_i \supset B_m$.

Для случаев 1) 2) и 3) доказательство $\Gamma \vdash (A \supset B_m)$ такое же, как и для $m = 1$.

Для случая 4) применим и.д. согласно которому $\Gamma \vdash (A \supset B_i)$ и $\Gamma \vdash (A \supset (B_i \supset B_m))$

Из теоремы **T2.3.3** получаем

$$(A \supset (B_i \supset B_m)) \supset ((A \supset B_i) \supset (A \supset B_m)).$$

Следовательно по MP получаем $\Gamma \vdash ((A \supset B_i) \supset (A \supset B_m))$, и еще раз по MP получаем $\Gamma \vdash (A \supset B_m)$.

Тем самым док-во по индукции завершено и для $m = n$ получаем требуемое утверждение.

2.4. Интерпретация языка логики FL4

В связи с неассоциативностью исключающей дизъюнкции, требуется определение n-местной исключающей дизъюнкции:

D2.3 $\vee^n (A_1, A_2, ..., A_n) =_{df} (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... \neg A_n) \vee$

$$\vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge ... \neg A_n) \vee ... \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... A_n)$$

Следующую теорему назовем тетралеммой истинности и ложности.

T2.5 $\vee^4 (|A \wedge - -A,\ -|A \wedge -A,\ |A \wedge -A,\ -|A \wedge - -A)$.

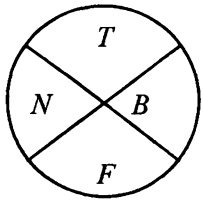
В соответствии с тетралеммой разобъем универсум всех п.п.ф. S на четыре непересекающихся области (T, F, B, N-области).

T-область (область строгой истинности) - множество истинных и неложных предложений.

F-область (область строгой ложности) - множество неистинных и ложных предложений.

B-область - множество истинных и ложных предложений.

N-область - множество неистинных и неложных предложений.



Сопоставим этим областям 4 истинностных значения T (3), F (0), C (B, 2)[1], I (N, 1). Выделенное значение - T (3). Содержательный смысл этих значений следующий: истинно и неложно; ложно и неистинно; истинно и ложно; ни истинно, ни ложно (см. также Мускенс [*Muskens R.A.* 1989]: true and not false, false and not true, both true and false, neither true nor false).

Отметим, что ранее в работах [*Павлов С.А.* 1979], [*Павлов С.А.* 1990] два последних значения назывались «противоречивость» C и «индифферентность» I. В связи с тем, что в языке **FL4** оказалось возможным рассматривать несколько видов противоречий, автор предпочел более нейтральные обозначения Белнапа.

Данн получил четыре значения, рассматривая подмножества двухэлементного множества {T}, {F}, {T,F}, {}. Он в [*Dunn J.M.* 2000] приводит пример тетралеммы (чатушкоти, fourcorner) индийского логика Санджая (6 век до нашей эры):

a. S есть P.

b. S есть не-P.

c. S есть P и не-P.

d. S есть ни P, ни не-P.

Значения истинности для логики истины фон Вригта: ‘Истинно и ложно’ (‘true and false’), ‘истинно, но не ложно’ (‘true

---

[1] В скобках приводятся обозначения Белнапа и цифровые обозначения истинностных значений.

but not false', 'univocally true'), 'ложно, но не истинно' ('false but not true', 'univocally false'), 'ни истинно, ни ложно' ('neither true nor false'), которые обозначаются им как '1', '+', '–', '0' соответственно.

Таблицы истинности для исходных и определенных выше связок:

A	–A	0	~A
T	F	F	F
F	T	F	T
B	T	F	B
N	F	F	N

→	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	T	T	T	T
B	T	B	B	T
N	T	N	T	N

A	|A	⌈A
T	T	T
F	F	F
B	T	F
N	F	F

⊃	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	T	T	T	T
B	T	T	T	T
N	T	T	T	T

Таблицы истинности для связок $\wedge, \vee, \supset$ являются таблицами классической логики **CL** (A1.1, A1.2, A1.3) со значениями истинности T и F.

Характеристической матрицей для логики **FL4** является логическая матрица $\mathfrak{M}^{\mathbf{FL4}}$.

$$\mathfrak{M}^{\mathbf{FL4}} = <\{T,F,B,N\}, -, \rightarrow, \{T\}> = <\{0,1,2,3\}, -, \rightarrow, \{3\}>$$

2.5. Непротиворечивость логики FL4

Понятие семантической общезначимости определяется и обозначается стандартно ($\models$, ее отрицание $\not\models$).

Имеем следующие теоремы о непротиворечивости **FL4**.

T2.6 $\vdash A \Rightarrow\ \models A$ (корректность).

D2.4.1 Исчисление непротиворечиво относительно – (~), если его формулы A и –A (A и ~A) не являются одновременно теоремами этого исчисления.

D2.2.2 Исчисление абсолютно непротиворечиво, если не всякая его формула является теоремой этого исчисления.

T2.3.1 **FL4** *непротиворечиво относительно* – и ~. (Следствие T2.2.)

T2.3.2 **FL4** *абсолютно непротиворечиво.*

Теоремы редукции:

T2.4.1 $\sim P \equiv -P$.

T2.4.2 $(P_1 \rightarrow P_2) \equiv (P_1 \supset P_2)$.

T2.4.3 $(\lceil A \supset B) \equiv (A \supset B)$.

T2.4.4 $(A \supset \lceil B) \equiv (A \supset B)$.

T2.4.5 $(\lceil A \supset \lceil B) \equiv (A \supset B)$.

Первому дизъюнктивным члену тетралеммы соответствует оператор $\lceil$. Следующая теорема поясняет содержательный смысл оператора строгой истинности $\lceil$ («истинно и неложно»), приведенный в комментарии его определения в D2.1.4.

T2.5 $\vdash \lceil A \equiv (|A \wedge - -A)$.

T2.4.3 $(\lceil A \supset A)$

Определим унарные операторы, соответствующие остальным дизъюнктивным членам тетралеммы. Продолжим с определения оператора строгой ложности.

D2.3.1 $\rceil A =_{df} (-|A \wedge -A)$.

('$\rceil$' содержательно означает 'ложно и неистинно ').

В следующих теоремах и метатеоремах показываются соотношения и различия между операторами ложности, строгой ложности и отрицанием.

T2.6.1 $\sim A \supset \rceil A$.

T2.6.2 $\rceil A \supset \sim A$.

T2.6.3 $\rceil A \supset -A$

T2.6.4 $\nvdash -A \supset \rceil A$

Т.е. оператор строгой ложности "сильнее" оператора ложности.

Продолжим определения унарных операторов.

D2.3.2 $\lfloor A =_{df} (|A \wedge -A)$.

('$\lfloor$' содержательно означает 'истинно и ложно').

D2.3.3 $\rfloor A =_{df} (-|A \wedge --A)$.

('$\rfloor$' содержательно означает 'ни истинно, ни ложно').

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

A	⌉A	⌊A	⌋A
T	F	F	F
F	T	F	F
B	F	T	F
N	F	F	T

Эти унарные операторы являются J_i-операторами (введенными Россером и Тьюркеттом [*Rosser J.B., Turquette A.R.* 1951]). Они соответствуют функции $j_i(m)$, которая принимает следующие значения.

$$j_i(m) = \begin{cases} T, \text{ если } m=v_i \\ F, \text{ если } m\neq v_i, \end{cases}$$

где v_0 есть F, v_1 есть B, v_2 есть N, v_3 есть T.

J_0, J_1, J_2, J_3, -операторам отвечают операторы ⌉, ⌊, ⌋, ⌈ соответственно.

Сокращение для T2.5: $\vee^4$ (⌈A, ⌉A, ⌊A, ⌋A)

О.М.Аншаков в [*Аншаков О.М.* 1998] определяет J-логики, истинностно-полные и С-расширяющие.

Множество логических операций логики L будем обозначать через O_L.

Определение 1. Пусть L – многозначная (возможно бесконечнозначная) логика. Логику L будем называть J-*логикой*, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

(1) в O_L существует хотя бы один нетривиальный J-оператор, т.е. операция J_W, где W – непустое собственное подмножество множества V_L;

(2) в алгебре логики L функционально выразимы бинарные операции $\wedge, \vee, \rightarrow$ и унарная операция ~, ограничения которых на множество $\{0, 1\}$ совпадают с классическими двузначными конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией и отрицанием, соответственно.

Не нарушая общности, будем считать, что операции $\wedge, \vee, \rightarrow$, ~ содержатся в O_L.

Заметим, что сформулированное определение включает условие классической корректности (аналог С-расширяемости).

Множество J-операторов J-логики L обозначим через JO_L.

Через V_L будем обозначать множество истинностных значений логики L.

Определение 2. Конечнозначная логика L называется *истинностно-полной*, если в ее алгебре функционально выразимы все J-операторы для одноэлементных подмножеств множества V_L, т.е. все J_α ($\alpha \in V_L$), определяемые следующим образом:

$$J_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1, \text{ если } \beta = \alpha, \\ \\ 0, \text{ если } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

Определение 3. Конечнозначная логика L называется С-*расширяющей*, если в ее алгебре функционально выразимы бинарные операции $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и унарная операция ~, ограничения которых на множество $\{0, 1\}$ совпадают с классическими двузначными конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией и отрицанием, соответственно.

T2.7.1 *Логика ложности* **FL4** *является* J-*логикой, истинностно-полной и* С-*расширяющей.*

T2.7.2 **FL4** *функционально неполна.*

2.6. Семантическая полнота логики FL4

Для доказательства нижеследующей Леммы 1, предшествующей теореме о семантической полноте, будут использоваться следующие теоремы (Доказательство леммы см. в Приложении 2).

T2.8.1.a $(\lceil A \supset \rceil{-A})$

T2.8.1.b $(\rceil A \supset \lceil{-A})$

T2.8.1.c $(\lfloor A \supset \lceil{-A})$

T2.8.1.d $(\rfloor A \supset \rceil{-A})$

T2.8.2.a $\lceil C \supset \lceil(B \rightarrow C)$

T2.8.2.1.b $(\lceil B \supset (\rceil C \supset \rceil(B \rightarrow C)))$

T2.8.2.1.c $(\lceil B \supset (\lfloor C \supset \lfloor(B \rightarrow C)))$

T2.8.2.1.d $(\lceil B \supset (\rfloor C \supset \rfloor(B \rightarrow C)))$

T2.8.2.2 $(\rceil B \supset \lceil(B \rightarrow C))$

T2.8.2.3.b $\vdash (\lfloor B \supset (\rceil C \supset \lfloor(B \rightarrow C)))$

T2.8.2.3.c $\vdash (\lfloor B \supset (\lfloor C \supset \lfloor(B \rightarrow C)))$

T2.8.2.3.d $\vdash (\lfloor B \supset (\rfloor C \supset \lceil(B \rightarrow C)))$

T2.8.2.4.b $\vdash (\rfloor B \supset (\rceil C \supset \rfloor(B \rightarrow C)))$

T2.8.2.4.c $\vdash (\rfloor B \supset (\lfloor C \supset \lceil(B \to C)))$

T2.8.2.4.d $\vdash (\rfloor B \supset (\rfloor C \supset \rfloor(B \to C)))$

T2.8.2.1.d $(\lceil B \supset (\rfloor C \supset \rfloor(B \to C)))$

T2.8.2.2 $(\rceil B \supset \lceil(B \to C))$

T2.8.2.3.b $(\lfloor B \supset (\rceil C \supset \lfloor(B \to C)))$

T2.8.2.3.c $(\lfloor B \supset (\lfloor C \supset \lfloor(B \to C)))$

T2.8.2.3.d $(\lfloor B \supset (\rfloor C \supset \lceil(B \to C)))$

T2.8.2.4.b $(\rfloor B \supset (\rceil C \supset \rfloor(B \to C)))$

T2.8.2.4.c $(\rfloor B \supset (\lfloor C \supset \lceil(B \to C)))$

T2.8.2.4.d $(\rfloor B \supset (\rfloor C \supset \rfloor(B \to C)))$

Лемма 1. *Пусть* A есть ппф, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ есть *попарно различные переменные, входящие в* A, *и для* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *задано некоторое распределение истинностных значений. Пусть для всякой* ппф B:

B′ *есть* $\lceil$B, *если* B *принимает значение* T,

B′ *есть* $\rceil$B, *если* B *принимает значение* F,

B′ *есть* $\lfloor$B, *если* B *принимает значение* B,

B′ *есть* $\rfloor$B, *если* B *принимает значение* N.

Тогда $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash A'$.

Следующая теорема понадобится для доказательства теоремы о семантической полноте.

T2.9 $((\lceil B \supset A) \supset ((\rceil B \supset A) \supset ((\lfloor B \supset A) \supset ((\rfloor B \supset A) \supset A))))$.

Теорема о семантической полноте

T2.10 *Если* ппф A *общезначима, то* ппф A *доказуема.*

Сокращенно: $\models A \Rightarrow \vdash A$ (семантическая полнота).

Доказательство (проводится методом Кальмара, обобщенном на четырехзначный случай).

Пусть $S, S_1, \ldots, S_n$ - переменные, входящие в ппф A.

Допустим, что A общезначима ($\models A$),

тогда по лемме 1 $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash A$.

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1}, \lceil S_n \vdash A$

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1}, \rceil S_n \vdash A$

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1}, \lfloor S_n \vdash A$

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1}, \rfloor S_n \vdash A$

Отсюда по теореме дедукции имеем

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1} \vdash \ulcorner S_n \supset A$

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1} \vdash \urcorner S_n \supset A$

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1} \vdash \llcorner S_n \supset A$

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1} \vdash \lrcorner S_n \supset A$

Используя теорему T2.9 и четырехкратно применяя модус поненс, получаем

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n-1} \vdash A$

Продолжая процесс элиминации остальных гипотез получим в результате $\vdash A$.

И также для логики **FL4** имеем теорему адекватности

T2.11 $\models A \Leftrightarrow \vdash A$.

3. Соотношения логики FL4 с четырехзначными логиками

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:
Четырехзначная логика Белнапа
Логика тавтологических следований E_{fde} и матрица Смайли
Логики истины Вригта
Комбинированные логики Смирнова
Мультиимпликативность логики FL4

Для сопоставления логики **FL4** с рядом известных логик понадобится определить некоторые связки, включая такие, как конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию. При этом необходимо иметь в виду, что в языке логики **FL4** для двухместных связок (которые представляют собой обобщение классических на область четырех значений) можно построить 15116544 различных определений.

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию через исходную импликацию и отрицание аналогично их определениям в классической логике. Приведем здесь же соответствующие таблицы истинности.

D3.1.1 $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \to \sim B)$.

&	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	F	F	F	F
B	B	F	B	F
N	N	F	F	N

D3.1.2[1] $(A \mathrm{V} B) =_{df} (\sim A \to B)$.

[1] Обращаем внимание на графические отличия вновь вводимого символа дизъюнкции V от символа дизъюнкции $\vee$ в D1.3.2.

V	T	F	B	N
T	T	T	T	T
F	T	F	B	N
B	T	B	B	T
N	T	N	T	N

D3.1.3 $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$.

$\leftrightarrow$	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	F	T	B	N
B	B	B	B	T
N	N	N	T	N

Для связок &, V и $\leftrightarrow$ имеются следующие соотношения редукции, соответствующие классическим условиям истинности для этих связок:

T3.1.1. $\vdash |(A \,\&\, B) \equiv |A \wedge |B$.

T3.1.2. $\vdash -(A \,\&\, B) \equiv -A \vee -B$.

T3.1.3. $\vdash |(A \text{ V } B) \equiv |A \vee |B$.

T3.1.4. $\vdash -(A \text{ V } B) \equiv -A \wedge -B$.

T3.2.1. $\vdash (P_1 \,\&\, P_2) \equiv (P_1 \wedge P_2)$.

T3.2.2. $\vdash (P_1 \text{ V } P_2) \equiv (P_1 \vee P_2)$.

T3.2.3 $\vdash (P_1 \leftrightarrow P_2) \equiv (P_1 \equiv P_2)$.

которые показывают, что таблицы истинности для связок & и V являются продолжением таблиц для связок $\wedge$, $\vee$ из области {T,F} на универсум {T,F,B,N}.

3.1. Четырехзначная логика Белнапа

Четыре истинностных значения логики Белнапа введенные им близки по смыслу истинностным значениям в интерпретации логики **FL4**.

В четырехзначной логике Белнапа [*Белнап Н.* 1981] имеются следующие значения истинности:

T - «говорит только Истину»
F - «говорит только Ложь»
N - «не говорит ни Истины, ни Лжи»
B - «говорит и Истину и Ложь»

Связки четырехзначной логики Белнапа соотносятся со связками языка логики **FL4** следующим образом:

Отрицанию, конъюнкции и дизъюнкции логики Белнапа соответствуют связки ~, & и V логики **FL4** (см. D2.1.2, D3.1.1 и D3.1.2)

Н.Белнап отмечает необходимость отличать знак «говорит только Истину» от знака «по меньшей мере говорит Истину», но не предлагает формального выражения их различения. В языке логики **FL4** это отличие в оценках предложений выражается употреблением двух различных операторов строгой истинности и истинности $\lceil$ и $|$ соответственно.

Н.Белнап содержательно формулирует следующие условия истинности для оценки конъюнкции:

«Отметить (A & B) как «по меньшей мере Ложь» только в случае, когда по меньшей мере одно из предложений A и B отмечено как «по меньшей мере Ложь».

Отметить (A & B) как «по меньшей мере Истина» только в случае, когда оба предложения отмечены как «по меньшей мере Истина». В логике **FL4** перечисленным Белнапом условия соответствуют следующие теоремы:

T3.3.1 $\vdash\ |(A \mathbin{\&} B) \equiv |A \mathbin{\&} |B$,

T3.3.2 $\vdash -(A \mathbin{\&} B) \equiv -A \vee -B$.

А также для дизъюнкции Н.Белнап формулирует следующие условия истинности:

«Отметить (A V B) как «по меньшей мере Истина» только в случае, когда по меньшей мере одно из предложений A и B отмечено как «по меньшей мере Истина».

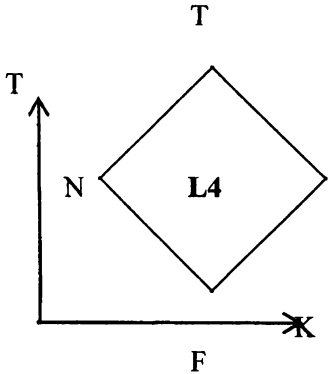
Отметить (A V B) как «по меньшей мере Ложь» только в случае, когда оба предложения отмечены как «по меньшей мере Ложь». В логике **FL4** перечисленным Н.Белнапом условия соответствуют следующие теоремы:

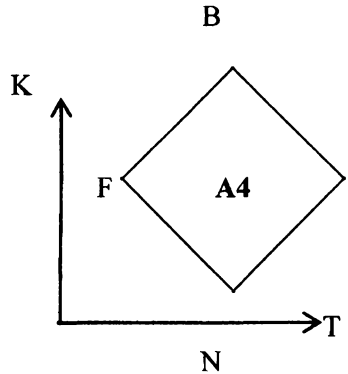
T3.3.3. $\vdash\ |(A \vee B) \equiv |A \vee |B$,

T3.3.4. $\vdash -(A \vee B) \equiv -A \mathbin{\&} -B$.

Для анализа и обоснования своей логики Н.Белнап привлекает логические и аппроксимационные решетки **L4** и **A4**.

Н.Белнап указал автору на возможность применения бирешеток для интерпретации своей логики. Фиттинг [*Fitting M.* 1988] использует бирешетки с двумя порядками: порядком знания $\leq_K$ и порядком истины $\leq_T$ (предпочтительнее говорить в данном случае "только истинно" или "истинно и неложно" или "строго истинно", то есть о порядке строгой истинности $\leq_T$). Приведем соответствующие диаграммы.





Определим в языке логики **FL4** импликацию строгой истины $\to^T$ и тавтологию знания T^K, соответствующие осям T и K.

D3.2.1 $(A \to^T B) =_{df} (\lceil A \to \lceil B) \wedge (\rceil\rceil A \to \rceil\rceil B)$.

Этой связке соответствуют следующая истинностная таблица:

$\to^T$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	T	T	T	T
B	T	F	T	T
N	T	F	T	T

D3.2.2 $(A\, T^K B) =_{df} (\lfloor A \to \lfloor B) \wedge (\rceil\rfloor A \to \rceil\rfloor B)$.

Название этой связки обусловлено тем, что формула является тождественно истинной (тавтологией) в классической области {T, F}, что видно из следующая истинностной таблицы:

T^K	T	F	B	N
T	T	T	T	F
F	T	T	T	F
B	F	F	T	F
N	T	T	T	T

Имеет смысл рассматривать следующие диаграммы, в которой изображенные оси символизируют отношения порядка: порядок истинности $\leq_t$, порядок ложности $\leq_f$ и порядок неложности $\leq_{-f}$. Положим, что истинность больше неистинности и больше ложности, а неложность больше ложности. Операторам истинности, неложности, ложности, неистинности соответствуют области *TB*, *TN*, *FB*, *FN*.

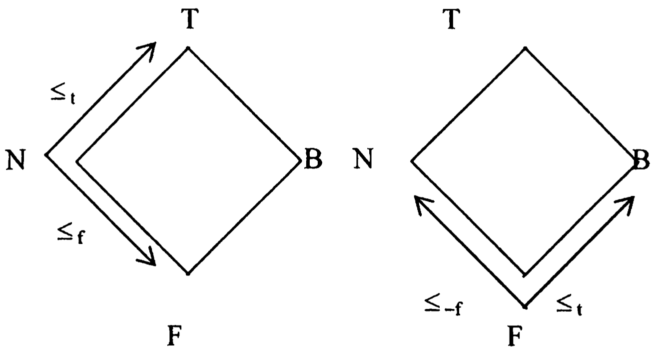


Диаграмма справа полезна для эротетической логики.

Определим импликации истинности $\rightarrow^t$, неложности $\rightarrow^{-f}$, а также обратную импликацию ложности $\leftarrow^f$, соответствующие отношениям порядка истинности $\leq_t$, порядка неложности $\leq_{-f}$ и порядка ложности $\leq_f$, следующим образом:

D3.3.1 $(A \rightarrow^t B) =_{df} |A \rightarrow |B$.

Этой связке соответствует следующая таблица истинности:

$\rightarrow^t$	T	F	B	N
T	T	F	T	F
F	T	T	T	T
B	T	F	T	F
N	T	T	T	T

Отметим, что В.М.Попов [*Popov V.M.* 1998] строит логику, исходя из иных соображений, связанных с семантикой возможных миров. Таблица для импликации $\supset^0$ в этой логике подобна таблице для импликации $\rightarrow^t$, и таблица для отрицания $\neg^0$ подобна таблице для оператора ложности.

$\supset^0$	1	0	t	f
1	1	0	1	0
0	1	1	1	1
t	1	0	1	0
f	1	1	1	1

A	$\neg^0$A
1	0
0	1
t	1
f	0

Также трехзначный фрагмент таблицы истинности для $\rightarrow^t$ со значениями T, F, B соответствует таблице для импликации логики Сетте.

D3.3.2 $(A \rightarrow^{-f} B) =_{df} --A \rightarrow --B$.

$\rightarrow^{-f}$	T	F	B	N
T	T	F	F	T
F	T	T	T	T
B	T	T	T	T
N	T	F	F	T

D3.3.3 $(A \leftarrow^{f} B) =_{df} -A \rightarrow -B$.

$\leftarrow^{f}$	T	F	B	N
T	T	T	T	T
F	F	T	T	F
B	F	T	T	F
N	T	T	T	T

Имеем следующие соотношения между связками $\rightarrow^T$, $\rightarrow^t$, $\rightarrow^{-f}$ и $\leftarrow^f$.

T3.4.1 $\vdash (A \rightarrow^{-f} B) \supset\subset (B \leftarrow^f A)$

T3.4.2 $\vdash (A \rightarrow^T B) \supset ((A \rightarrow^t B) \wedge (A \rightarrow^{-f} B)) \vee \ulcorner(A \rightarrow B)$

Н.Белнап говорит, что A влечет B, если этот вывод никогда не приводит нас от «Истины» к ее отсутствию (т.е. сохраняет истинность), а также никогда не приводит нас от отсутствия «Лжи» к «Лжи» (т.е. сохраняет не-ложность).

Определим соответствующую вышеуказанному положению S-импликацию $\rightarrow^{S}$ для логики Белнапа.

D3.4.1 $(A \rightarrow^{S} B) =_{df} ((A \rightarrow^{t} B) \wedge (A \rightarrow^{-f} B))$

Этой связке соответствует следующая таблица истинности:

$\rightarrow^{S}$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	T	T	T	T
B	T	F	T	F
N	T	F	F	T

Н.Белнап согласился с таким определением.

3.2. Логика тавтологических следований E_{fde} и матрица Смайли

Е.А.Сидоренко писал в [*Сидоренко Е.А.* 2000] «Любой логик, сторонником какого бы понимания логического следования он ни являлся, по-видимому, согласится с тем, что формула *B* логически следует из *A*, если и только если в рамках принятой семантики всякое достаточное условие истинности *A* (детерминируемое исключительно логической структурой этой формулы) является достаточным условием истинности *B*, а всякое достаточное условие ложности *B* является достаточным условием ложности *A*».

T3.4.3 $\vdash (A \rightarrow^{S} B) \equiv ((|A \rightarrow |B) \wedge (-B \rightarrow -A))$

означающую, что истинность A имплицирует истинность B и ложность B имплицирует ложность A

Истинностная таблица для S-импликации совпадает с таблицей, предложенной Т.Смайли для логики тавтологических следований E_{fde}.

Пусть связками, соответствующими связкам логики тавтологических следований E_{fde}, будут ~, &, V, $\rightarrow^{S}$, определенные выше. Тогда имеем метатеорему:

T3.5. *Если* A *есть теорема* E_{fde}, *то* A *есть теорема* **FL4**.

$\vdash_{Efde} A \Rightarrow \vdash A$

Характеристическая матрица для E_{fde} есть

$\mathfrak{M}_{Efde} = <\{T,F,B,N\}, \sim, \&, V, \rightarrow^{S}, \{T\}>$,

таблицы истинности для связок которой заданы выше.

Необходимо отметить, что в языке **FL4** нет ограничений на вхождения S-импликации в формулы языка, в отличие от языка E_{fde}.

Для импликации $\rightarrow$ и связок ~, &, V имеются следующие соотношения.

T3.6.1 $\vdash (A \rightarrow B) \equiv {\sim}(A \,\&\, {\sim}B)$

T3.6.2 $\vdash (A \rightarrow B) \equiv ({\sim}A \vee B)$

Эти теоремы показывают, что в логике Белнапа через отрицание ~ и конъюнкцию & или через отрицание ~ и дизъюнкцию V можно определить импликацию, аналогичную исходной импликации логики **FL4**.

Отсюда следует, что к исходным связкам логики Белнапа достаточно добавить оператор, подобный оператору ложности или оператору истинности, чтобы получить логику, функционально эквивалентную логике **FL4**. Поэтому логику **FL4** можно рассматривать как обогащение логики Белнапа оператором ложности (или истинности).

С помощью S-импликации покажем тонкое различие между отрицанием и оператором строгой ложности, не выявляемое с помощью импликации $\supset$

T3.7.1 $\vdash\ \rceil A \rightarrow^{S} {\sim}A$,

T3.7.2 $\nvdash {\sim}A \rightarrow^{S} \rceil A$.

То есть оператор строгой ложности «сильнее» оператора отрицания.

Также имеем следующее соотношение.

T3.7.3 $\vdash\ \rceil A \equiv (A \rightarrow^{S} 0)$

Определим S-эквивалентность $\equiv^{S}$, соответствующую S-импликации.

D3.4.2 $(A \equiv^{S} B) =_{df} (A \rightarrow^{S} B) \wedge (B \rightarrow^{S} A)$.

Эквивалентности $\equiv^{S}$ соответствует следующая таблица истинности:

$\equiv^{S}$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	F	T	F	F
B	F	F	T	F
N	F	F	F	T

T3.8 $\vdash (A \equiv^{S} B) \equiv (\lceil A \wedge \lceil B) \vee (\rceil A \wedge \rceil B) \vee (\lfloor A \wedge \lfloor B) \vee (\rfloor A \wedge \rfloor B)$

T3.9 $\vdash (A \to^S B) \equiv (A \equiv^S (A \& B))$

Теорема о замене эквивалентным имеет место только для S-эквивалентности.

T3.10. *Если ппф* B *получается из ппф* A *подстановкой ппф* N *вместо всех или некоторых вхождений ппф* M *в ппф* A, *то*

если $\vdash (M \equiv^S N)$, *то* $\vdash (A \equiv^S B)$.

$\vdash (M \equiv^S N) \Rightarrow \vdash (A \equiv^S B)$.

Мускенс в [*Muskens R.A.* 1989] рассматривает четырехзначные логики и вводит следующие истинностные значения: «истинно и неложно», «ложно и неистинно», «ни истинно, ни ложно» и «истинно и ложно». Следуя Белнапу, он обозначает эти значения как T, F, N и B, соответственно.

3.3. Логики истины фон Вригта

Фон Вригт вначале построил трехзначную логику истины **TL**, которая была рассмотрена им в работе [*Wright G.H. von* 1986], опубликованной в номере "Synthese", посвященном 3-му Советско-Финскому коллоквиуму по логике (см. также [*Wright G.H. von* 1984]).

Затем им была построена четырехзначная логика истины T″L [*Вригт Г.Х. фон* 1986], которая после замечаний проф. Алькуррона была дополнена, исправлена и названа T″LM [*Wright G.H. von* 1987].

Среди логик истины, вводимых фон Вригтом, наиболее близкой к **FL4** является четырехзначная логика T″LM.

Фон Вригт в [*Wright G.H. von* 1987] строит ряд логик истины, начиная с исходной логики истины, которую он называет «core system» **CS**.

Алфавит логик истины фон Вригта

p, q, ... сентенциальные переменные;

~, & связки;

T оператор истины;

(,) технические символы.

Производные связки определяются следующим образом:

$(A \vee B) =_{df} \sim(\sim A \;\&\; \sim B)$

$(A \to B) =_{df} \sim(A \;\&\; \sim B)$

$(A \leftrightarrow B) =_{df} \sim(A \;\&\; \sim B) \;\&\; \sim(\sim A \;\&\; B)$

Аксиомы CS

A0 **CS** Классическая логика для префиксированных оператором Т-формул.

Для остальных формул (включая Т-формулы):

A1 **CS** $TA \leftrightarrow T{\sim}{\sim}A$,

A2 **CS** $T(A \& B) \leftrightarrow TA \& TB$,

A3 **CS** $T{\sim}(A \& B) \leftrightarrow T{\sim}A \vee T{\sim}B$.

Правила вывода

R1. Подстановка

R2. $$\frac{A, (A \to B)}{B}$$ (Правило отделения CS[2], *modus ponens*)

R3. Правило Истины. Если формула А доказуема, то формула $(TA \& {\sim}T{\sim}A)$ также доказуема. Другими словами, доказуемые формулы только истинны.

Добавляя дополнительные аксиомы фон Вригт получает ряд логик истины, включая ряд трехзначных и одну четырехзначную.

О трехзначных системах **TL**, **TLM** он говорит, что они могут быть названы *параполными*, а системы **T'L**, **T'LM** *паранепротиворечивыми*, употребляя терминологию Ф.М.Квесады.

К аксиомам **CS** Вригт добавляет следующую аксиому и называет эту систему **T''L** в [*Wright G.H. von* 1987] (отметим, что в [*Вригт Г.Х. фон* 1986] эта аксиома для **T''L** отсутствует).

A4 **(T''L)** $T{\sim}TA \leftrightarrow {\sim}TA$.

К аксиомам **T''L** Вригт добавляет еще одну аксиому и называет эту систему **T''LM**.

A''6 **(T''LM)** $(TA \& {\sim}T{\sim}A) \to A$

и называет эту систему **T''LM**.

Производные правила вывода **FL4**

R3.1 $$\frac{A, (A \to B)}{B}$$ (Это правило вывода аналогично R2 **CS**.)

---

[2] Здесь приводятся оригинальные выражения фон Вригта исключительно для удобства сравнения.

$$\text{R3.2}\quad \frac{A}{(|A \mathbin{\&} \sim|\sim A)}$$

Это правило вывода аналогично «Правилу Истины» R3 **CS**.

Следующие теоремы **FL4** аналогичны аксиомам **CS** и последующих систем:

T3.10.1	$\vdash \; |A \leftrightarrow |\sim\sim A,$	(A1 **CS**)
T3. 10.2	$\vdash \; |(A \mathbin{\&} B) \leftrightarrow |A \mathbin{\&} |B,$	(A2 **CS**)
T3. 10.3	$\vdash \; |\sim(A \mathbin{\&} B) \leftrightarrow |\sim A \vee |\sim B.$	(A3 **CS**)
T3. 10.4	$\vdash \; |\sim|A \leftrightarrow \sim|A\,.$	(A4 T″L).
T3. 10.5	$\vdash \; (|A \mathbin{\&} \sim|\sim A) \rightarrow A\,.$	(A″6 T″LM)

Значения истинности для **T″LM**: «Истинно и ложно» («true and false»), «истинно, но не ложно» («true but not false», «univocally true»), «ложно, но не истинно» («false but not true», «univocally false»), «ни истинно, ни ложно» («neither true nor false»), которые обозначаются как '1', '+', '–', '0' соответственно.

Значения истинности +, –, 1, 0 для **T″LM** соответствуют значениям T, F, B, N для **FL4**.

Таблица для & в интерпретации T″LM подобна таблицам для & в интерпретации логики **FL4** и логики Белнапа.

Таблицам операторов T и ~ для T″LM соответствуют таблицы для | и ~ в логике **FL4**.

Эти соответствия таблиц позволяют говорить о функциональной эквивалентности логики **FL4** и одной из логик истины фон Вригта, а именно, логике **T″LM**.

Существенное отличие логики истины фон Вригта **T″LM** от логики ложности **FL4** состоит в том, что в **T″LM** теорема дедукции недоказуема.

Многочисленность логик истины у фон Вригта отличает его подход к построению концепции истинности от развиваемого подхода автора.

Ссылаясь на идеи, положенные в основание логики истины Вригта TL [*Вригт Г.Х. фон* 1986], В.А.Смирнов построил один из вариантов комбинированной логики предложений и событий.

3.4. Комбинированные логики Смирнова

Исходя из двоякой интерпретации пропозициональной логики – сентенциальной и событийной, В.А.Смирнов построил ряд комбинированных исчислений предложений и событий [*Смирнов В.А.* 1986, 1989]. Построенные логики являются двухуровневыми, включающими внешний уровень для предложений, соответствующий абстрактной части логики, и внутренний, соответствующий онтологическим предпосылкам.

Четкое различение двух уровней логики Смирнов нашел у Васильева, в работах которого металогика отделяется от эмпирической логики [*Васильев Н.А.* 1989].

Смирнов исходит также из фрегевского различения утвердительного употребления предложений от неутвердительного.

Два этапа построения двухуровневых комбинированных исчислений

В построении Смирновым комбинированных исчислений высказываний и событий можно выделить два этапа. На первом этапе в работе [*Смирнов В.А.* 1986] построено несколько исчислений, в которых варьируется как внешний уровень для высказываний, так и внутренний уровень, принятием для каждого в отдельности как классической, так и неклассической логик. При этом различаются и не смешиваются событийные термы а и высказывания θа. Акты утверждения не итерируются.

В последующей работе [*Смирнов В.А.* 1989], которая может рассматриваться как второй этап построения комбинированных исчислений, Смирнов отмечает, что акт утверждения сам является событием, и возникает вопрос о его итерации.

Смирнов предлагает различать два акта: акт предикации – синтез свойств (или отношений) с объектами и акт утверждения – акт соотнесения мыслимого содержания с реальностью.

Акты предикации записываются как выражения вида:

$P(a)$, $R(a_1, \ldots a_n)$, которые описывают некоторые положения дел, события и являются событийными термами.

Акты утверждения записываются как выражения вида:

$\theta P(a)$, $\theta R(a_1, \ldots, a_n)$, которые являются предложениями или высказываниями. Событийные термы и высказывания не смешиваются.

Приведем язык одного из комбинированных исчислений предложений и событий, а именно **СМ**.

Алфавит[3]

$p, q, p_1, q_1 \ldots$	переменные, пробегающие по событиям
θ	указатель акта утверждения
$\cap, \cup, \supset, \sim$	внутренние логические знаки
$\&, \vee, \rightarrow, \neg$	внешние логические знаки

Правила образования

1) событийные переменные суть термы.
2) если a, b – термы, то $(a \cap b)$, $(a \cup b)$, $(a \supset b)$, $\sim a$ суть термы.
3) если a есть терм, то θa есть формула.
4) если α, β есть формула, то $(\alpha \ \& \ \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $\neg\alpha$ суть формулы.

Отметим, что выражения $\theta p \rightarrow p$, $\theta p \cap \theta q$ не есть ни термы, ни формулы, они не являются правильно построенными выражениями. То есть не разрешается смешивать термы и высказывания.

Связка эквивалентности определяется стандартно:

$(\alpha \equiv \beta) =_{df} (\alpha \rightarrow \beta) \ \& \ (\beta \rightarrow \alpha)$

Схемы аксиом

B0. Схемы аксиом классического пропозиционального исчисления.

B1. $\theta(a \cap b) \equiv \theta a \ \& \ \theta b$

B2. $\theta(a \cup b) \equiv \theta a \vee \theta b$

B3. $\theta{\sim}(a \cap b) \equiv \theta{\sim}a \vee \theta{\sim}b$

B4. $\theta{\sim}(a \cup b) \equiv \theta{\sim}a \ \& \ \theta{\sim}b$

B5. $\theta{\sim}{\sim}a \equiv \theta a$

Правило вывода – modus ponens.

Система **СМ** является логикой де Моргана с внешней классической логикой.

В системе **СМ** и в других исчислениях [*Смирнов В.А.* 1986] нет итерации акта утверждения. Однако акт утверждения, в свою очередь, может рассматриваться как событие, поэтому В.А.Смирнов предложил расширение **СМ**, в котором такое рассмотрение было бы возможным.

Вторым этапом построения комбинированной логики стало такое ее обобщение В.А.Смирновым, которое включает в рас-

---

3 Здесь употребляются символы языка **СМ**, согласованные с символами последующего расширения этого языка.

смотрение итерацию акта утверждения. Акт утверждения рассматриваться им как событие.

Ссылаясь на идеи, положенные в основание логики истины TL фон Вригта [*Wright G.H. von* 1986], В.А.Смирнов предлагает обобщенную комбинированную логику предложений и событий **OCM**.

Правила образования термов и формул языка **OCM** задаются следующим образом:

К алфавиту **CM** добавляются символы квадратных скобок [ ], роль которых состоит в преобразовании формул, заключенных в них, в событийные термы.

К правилам образования **CM** добавляем следующее правило:

5) если α есть формула, то $[\alpha]$ есть терм.

Далее к системе аксиом **CM** добавляем аксиому

$\theta[\alpha] \equiv \alpha$.

Таким образом к ряду комбинированных логик из [*Смирнов В.А.* 1986] добавляется еще одна[4].

Это обобщение комбинированной логики В.А.Смирнов провел в работе [*Смирнов В.А.* 1989], опубликованной в сборнике, посвященном IV-му Советско-Финскому коллоквиуму по логике. В этой статье он сравнивает язык обобщенной комбинированной логики предложений и событий **OCM** с языком логики истины **TL**, рассмотренной фон Вригтом в работе [*Вригт Г.Х. фон* 1986].

Приведем формулировку языка логики истины **TL**[5]

1) Переменная или функционально-истинностная комбинация переменных, предваряемые символом *T*, есть атомарное *T*-предложение.
2) Если α переменная, то $T\alpha$ есть атомарное *T*-предложение.
3) Если α есть функционально-истинностная комбинация переменных, то $T\alpha$ есть атомарное *T*-предложение.
4) Если α есть функционально-истинностная комбинация атомарных *T*-предложений и (или) переменных, то $T\alpha$ есть атомарное *T*-предложение.

---

[4] Поэтому авторам, проводящим сопоставление с комбинированными логиками, следует указывать, с какой из них проводится сопоставление или какая из них используется.

[5] В этой формулировке исправлен ряд опечаток, имеющихся в работах [*Wright G.H. von* 1986] и [*Смирнов В.А.* 1989].

5) Функционально-истинностная комбинация атомарных *T*-предложений есть молекулярное *T*-предложение.
6) Атомарное или молекулярное *T*-предложение есть *T*-предложение.

Аксиомы

A0. Все тавтологии **PL** (классической пропозициональной логики), когда вместо переменных стоят *T*-предложения.

A1. $Tp \to {\sim}T{\sim}p$

A2. $Tp \leftrightarrow T{\sim}{\sim}p$

A3. $T(p \,\&\, q) \leftrightarrow T(p) \,\&\, T(q)$

A4. $T{\sim}(p \,\&\, q) \leftrightarrow T({\sim}p) \vee T({\sim}q)$

A5. $T{\sim}Tp \leftrightarrow {\sim}Tp$

Правила вывода

R1. Подстановка **PL**- или **TL**-формул вместо переменных в доказуемые формулы.

R2. Modus ponens

R3. Правило истины: если α – теорема, то $T\alpha$ – теорема.

Оператор истины *T* логики истины **TL** интерпретировался Смирновым как акт утверждения θ.

Смирнов показывал, что по каждому *T*-предложению можно построить формулу языка **OCM**, и обратно.

Например *T*-предложению

$T(\mathrm{p} \to T(\mathrm{p}))$ соответствует формула $\theta([(\mathrm{p} \supset [\theta \mathrm{p}])]$, а формуле

$T\mathrm{p} \to T{\sim}T{\sim}p$ соответствует формула $\theta\mathrm{p} \to [\neg\theta{\sim}p]$.

Отметим, что остается вопрос о соответствии формул, не являющихся *T*-предложениями, формулам языка **OCM**.

Для логики де Моргана Смирнов вводит четырехзначную интерпретацию с истинностными значениями 1, 0, И (неопределенность), w (абсурд) [6].

Теоремой как **CM**, так и **OCM** является следующая тетралемма:

T3.11. $(\theta\mathrm{p}\&\neg\theta{\sim}\mathrm{p})\vee(\theta{\sim}\mathrm{p}\&\neg\theta\mathrm{p})\vee(\neg\theta\mathrm{p}\&\neg\theta{\sim}\mathrm{p})\vee(\theta\mathrm{p}\&\ \theta{\sim}\mathrm{p})$

Аналогичная этой теореме тетралемма доказуема в логике истины Вригта **T″L** [*Вригт Г.Х. фон* 1986].

Аналогичная T3.11 тетралемма имеет место и в исчислении предикатов истинности и ложности, опубликованном в сборнике тезисов 2-го Советско-Финского коллоквиума по логике [*Павлов С.А.* 1979], см. также [*Pawlow S.A.* 1978]. Там же имеется аксиома $|p \equiv p$ (где $|$ есть символ оператора истинности), аналогичная аксиоме $\theta[\alpha] \equiv \alpha$ обобщенной комбинированной логики предложений и событий **OCM**.

В связи с тем, что логики истины фон Вригта имеют сходство с логикой с операторами истинности и ложности **FL4**, (сопоставление этих логик проведено выше), представляет интерес сравнить последнюю с комбинированными логиками предложений и событий.

Отметим, что выразительные возможности языка **FL4** шире, чем языка **OCM**.

Имеется значительное сходство и параллели в подходах и формулировках комбинированного исчисления **OCM** В.А.Смирнова с логикой с операторами истинности и ложности **FL4**, подобно тому, как это имеет место в отношении логик истины фон Вригта.

Секвенциальная формулировка логики с операторами истинности и ложности

Ряд комбинированных исчислений и логику истины **TL** В.А.Смирнов формулирует также и в секвенциальной форме. Поэтому имеет смысл сформулировать и логику с операторами истинности и ложности **FL4** в секвенциальной форме.

Отметим, что логика с операторами истинности и ложности **FL4** может рассматриваться как двухуровневая. В ее формулировке используются метапеременные A, B для ппф (первый уровень) и P, P_1 для T.F.-формул (второй уровень). Для T.F.-формул имеет место классическая логика. Операторы истинности и ложности обозначим символами | и –, исходную импликацию Imp (чтобы не смешивать со стрелкой секвенциального исчисления)[6].

К обычным правилам для классических связок добавляем следующие логические фигуры заключения:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, P}{\Gamma \to \Delta, |P} \qquad \frac{P, \Gamma \to \Delta}{|P, \Gamma \to \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \to -A, |B}{\Gamma \to \Delta, |(A \text{ Imp } B)} \qquad \frac{-A,\ \Gamma \to \Delta \quad |B, \Gamma \to \Delta}{|(A \text{ Imp } B), \Gamma \to \Delta}$$

[6] Исходная импликация исчисления **FL4** обозначается как →.

$$\frac{\Gamma \to \Delta, |A, \quad \Gamma \to \Delta, -B}{\Gamma \to \Delta, -(A \text{ Imp } B)} \qquad \frac{|A, -B, \Gamma \to \Delta}{-(A \text{ Imp } B), \Gamma \to \Delta}$$

Отметим, что среди сублогик логики с операторами истинности и ложности **FL4** имеются подструктурные логики. Таковой является трехзначная подлогика **FL3N**, которая, будучи функционально эквивалентной трехзначной логике Лукасевича, является логикой без сокращения.

3.5. Мультиимпликативность логики FL4

В языке **FL4** был определен ряд импликаций. Это позволяет говорить о мультиимпликативности логики **FL4**. Всевозможным импликациям будут соответствовать таблицы истинности, являющиеся продолжением таблиц материальной импликации классической логики на область {B,N}. Об их числе говорят следующие метатеоремы.

T3.12.1. *Для импликативных формул имеется* 944784 *класса* 4-*эквивалентности.*

T3.12.2. *Для импликативных формул имеется* 4096 *класса* D-*эквивалентности.*

Сформулируем ряд требований для импликаций. Пусть $(A \to^n B)$ некоторая импликативная формула.

1. Формула $(A \to^n B)$ должна быть определима в языке логики FL4.
2. $(P_1 \to^n P_2) \supset (P_1 \supset P_2)$
3. $(A \to^n B) \supset (A \supset B)$

T3.12.3. *Для импликативных формул, удовлетворяющих требованиям* 1., 2., 3., *имеется* 419904 *классов* 4-*эквивалентности.*

Классификация таких импликативных формул проведена в работе [*Павлов С.А.* 1995].

4. Классификация формул с одной переменной

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:
Расширение области определения операторов
9 видов отрицаний
9 видов операторов утверждения, неэлиминируемость оператора истинности
Виды противоречий
Виды тавтологий. Различные формулировки законов логики
Бивалентные и трехвалентные формулы
15 областей универсума предложений

В этом параграфе исследуются и классифицируются все возможные унарные операторы языка логики **FL4**, сравниваются их свойства, в языке логики **FL4** выражаются различные формулировки законов логики, определяются подлогики логики **FL4**.

Расширение области определения для унарных операторов классической логики ведет к увеличению их числа. Для их сравнения и разбиения на классы используем ряд выше определенных эквивалентностей.

Для этих эквивалентностей имеем следующие положения, выражающие закон тождества или нарушение закона тождества.

T4.1.1.1 $\nvdash (A \leftrightarrow A)$.

T4.1.1.2 $(A \equiv^4 A)$.

T4.1.1.3 $(A \supset\subset A)$.

Следующие теоремы и метатеоремы показывают различия между введенными эквивалентностями

T4.1.2.1 $(A \to B) \supset (A \to^S B)$.

T4.1.2.2 $\nvdash (A \to^S B) \supset (A \to B)$.

T4.1.2.3 $(A \to^S B) \supset (A \supset B)$.

T4.1.2.4 $\nvdash (A \supset B) \supset (A \to^S B)$.

Теорема подстановочности имеет место только для 4-эквивалентности.

T4.1.3 *Если ппф* B *получается из ппф* A *подстановкой ппф* N *вместо всех или некоторых вхождений ппф* M *в ппф* A, *то*

если $\vdash (M \equiv^4 N)$, *то* $\vdash (A \equiv^4 B)$.

$\vdash (M \equiv^4 N) \Rightarrow \vdash (A \equiv^4 B)$.

Сравним дедуктивные свойства исходной и введенных импликаций.

T4.1.4.1 $\vdash (A \to B) \Rightarrow (A \vdash B)$.

T4.1.4.2 *Не имеет места, что* $(A \to^S B) \Rightarrow \vdash (A \to B)$.

T4.1.4.3 $\vdash (A \to^S B) \Rightarrow (A \vdash B)$.

T4.1.4.4 *Не имеет места, что* $(A \vdash B) \Rightarrow \vdash (A \to^S B)$.

T4.1.4.5 $\vdash (A \supset B) \Leftrightarrow (A \vdash B)$.

4.1. Расширение области определения операторов

Рассмотрим схемы формул, в которых имеются вхождения только одной метапеременной для ппф, которые будем далее называть 1-формулами.

Имеет смысл классифицировать 1-формулы, разбив множество этих формул на классы эквивалентности. Для 4-эквивалентности и D-эквивалентности имеют место следующие метатеоремы о классах эквивалентности.

T4.2.1.1 *Для* 1-*формул имеется* 36 *классов* 4-*эквивалентности.*

T4.2.1.2 *Для* 1-*формул имеется* 16 *классов* D-*эквивалентности.*

Так как в 1-формулы входит только одна метапеременная, имеет смысл представлять их как формулы, построенные из некоторого унарного оператора и метапеременной. Метаобозначением для унарных операторов будет символ O. Тогда 1-формулы могут рассматриваться как имеющие вид O(A).

Рассматривая таблицы истинности унарных операторов логики ложности **FL4** как продолжение таблиц истинности унарных операторов классической логики на область {B, N}, проведем классификацию унарных операторов логики **FL4**.

Унарные операторы, таблицы истинности которых являются всевозможными продолжениями таблицы истинности некоторого унарного оператора классической логики, включим в один класс. Таких классов имеем четыре, которые будем называть классами: 1) тавтологий, 2) противоречий, 3) отрицаний, 4) утверждений.

Отметим, что оператор последнего класса практически не используется в классической логике ввиду тривиальной идентичности его таблицы истинности значениям исходной переменной. Примем его название как противоположное отрицанию, так как значения истинности его таблицы противоположны соответствующим значениям таблицы для отрицания.

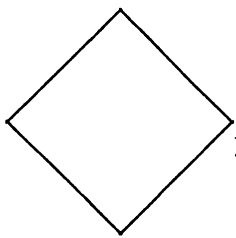
Эквивалентность операторов $O_1(A)$, $O_2(A)$, соответствующая последнему разбиению на классы 1-формул, назовем CL-эквивалентностью (эквивалентность в $\{T,F\}$ - области) и определим ее так:

D4.1. $(O_1(A) \equiv^{CL} O_2(A)) =_{df} (\lceil A \vee \rceil A) \supset (O_1(A) \equiv^{4} O_2(A))$

Соотношения между классами выражается следующей диаграммой.

Класс тавтологий

Класс отрицаний



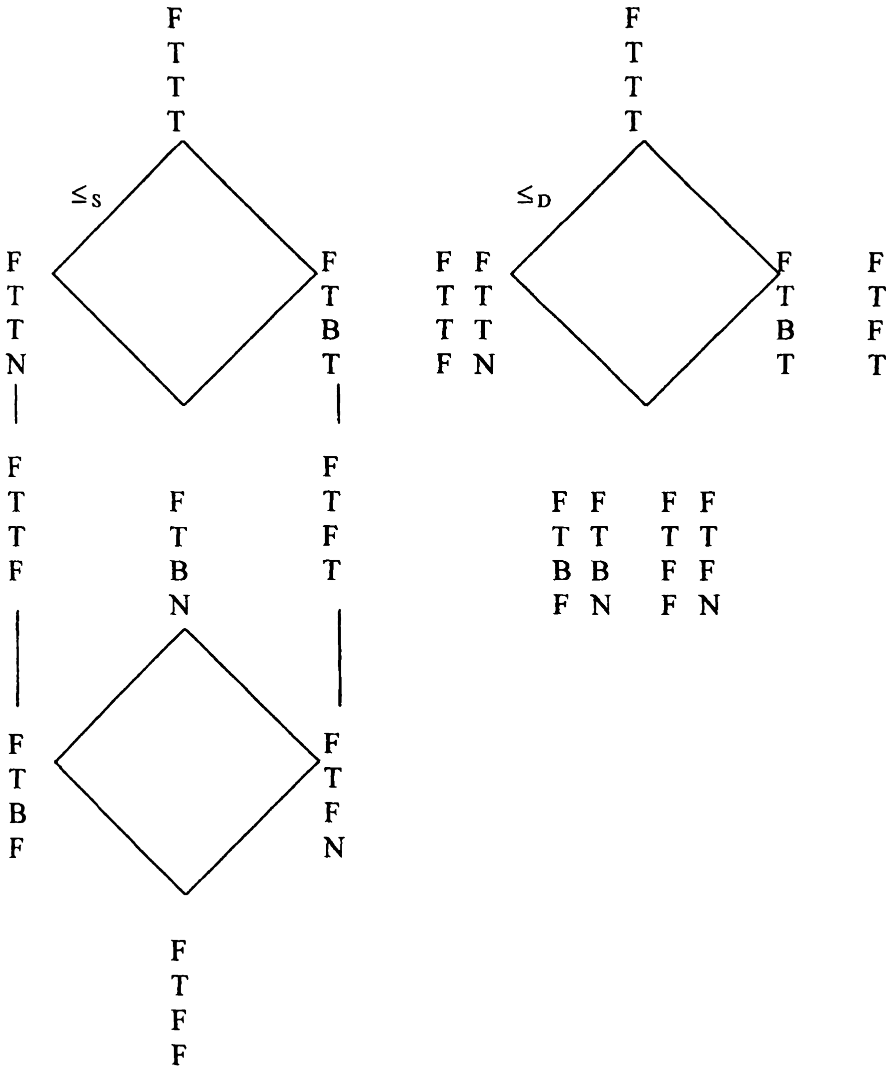
Класс утверждений

Класс противоречий

Каждый из четырех вышеупомянутых классов имеет следующую структуру подклассов (представленную на диаграммах), упорядоченных соответствующим импликациям $\underset{S}{\rightarrow}$ и $\supset$ отношениями порядка $\leq_S$ (см. на диаграмме слева) и $\leq_D$ (D-порядок, справа).

В каждом из последних четырех классов содержится по 9 операторов. На диаграмме приведены таблицы истинности для класса отрицаний. Аналогично расположены таблицы истинности для остальных классов (достаточно заменить значения в двух верхних строках).

Класс отрицаний



4.2. 9 видов отрицаний

Начнем рассмотрение унарных операторов с класса отрицаний. Представим таблицы истинности для всех 9 различных операторов отрицания в **FL4**.

A	~A	⌉A	–A	~A V–A	~A V–|A	–|A	⌉⌈A	~A & –|A	~A &–A
T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
B	B	F	T	T	B	F	T	F	B
N	N	F	F	N	T	T	T	N	F

В естественном языке имеем различные примеры отрицаний, которые могут иметь отношение к характеристике предложений: А - не-А, информация - дезинформация, ассоциация – дизассоциация, соединение - рассоединение, смысл - бессмыслица, рационально-иррационально, тезис-антитезис, логично-алогично, consist-inconsist.

T4.3 FL4 *непротиворечиво относительно всех операторов отрицания.*

Используя для всех видов отрицаний обобщенный метасимвол n, имеем следующие схемы теорем

T4.4.1 $\vdash (nA \equiv^{S} nnnA)$.

T4.4.2 $\vdash \ (A \supset nnA)$.

Закон двойного отрицания

Для различных видов отрицания имеем несколько формулировок, выражающих закон двойного отрицания или его нарушение.

T4.5.1 $\vdash (A \ \equiv^{S} {\sim}{\sim}A)$.

T4.5.2 $\vdash (A \supset\subset {\sim}{\sim}A)$.

T4.5.3 $\nvdash (A \equiv^{S} --A)$.

T4.5.4 $\nvdash (--A \supset A)$.

T4.5.5 $\nvdash (\urcorner\urcorner A \supset A)$.

Различия операторов ложности и строгой ложности выражаются в следующих теоремах (см также предыдущие).

T4.6.1 $\vdash \urcorner A \ \supset -A$

T4.6.2 $\nvdash -A \ \supset \urcorner A$

Отметим также, что в языке логики FL4 различаются операторы ложности и неистинности, эквивалентные в классической логике.

T4.6.3 $\nvdash\ -A \supset -|A$

T4.6.4 $\nvdash\ -|A \supset -A$

4.3. 9 видов операторов утверждения, неэлиминируемость оператора истинности

Все возможные унарные операторы из класса операторов утверждения представим своими таблицами истинности.

A	$\ulcorner A$	$\|A$	$A \vee \|A$	$A \vee --A$	$--A$	$\urcorner\urcorner A$	$A \,\&\, --A$	$A \,\&\, \|A$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F	F
B	F	T	T	B	F	T	F	B
N	F	F	N	T	T	T	N	F

Используя для всех видов утверждений обобщенный метасимвол t, имеем следующие схемы теорем.

T4.7.1 $\vdash t\,P \equiv P$.

То есть в рамках классической логики все операторы утверждения могут быть элиминированы.

T4.7.2 $\vdash tA \equiv^{S} ttA$.

T4.7.3 $\vdash\ A \supset tA$.

T4.7.4 *Каждому оператору утверждения* t_i *можно сопоставить оператор двойного отрицания* n_in_i

$$t_iA \equiv^{S} n_in_iA.$$

Неэлиминируемость оператора истинности

Такие операторы утверждения как $|$, $\ulcorner$, $--$, $\urcorner\urcorner$ в общем случае изменяют валентность предложения A, на которое они действуют. Поэтому ни один из этих операторов не может быть исключен из рассмотрения, в отличие от классической логики, в которой результат действия операторов утверждения на предложение P эквивалентен предложению P.

Неэлиминируемость операторов истинности из языка FL4 имеет место, в частности, для операторов $|$ и $\ulcorner$. То есть для них T-эквивалентность в общем случае не имеет места.

T4.8.1 $\nvdash (|A \equiv^{S} A)$.

T4.8.2 $\nvdash (|A \supset\subset A)$.

T4.8.3 $\nvdash (\ulcorner A \equiv^{S} A)$.

T4.8.4 $\vdash (\ulcorner A \supset\subset A)$.

Таким образом отсюда следует вывод, имеющий философские следствия, что в отличие от классической логики, оператор истинности в логике **FL4** нетривиален и не устраним из языка логики **FL4**. Тем самым показывается недостаточность концепций минималистской теории истины и дефляционизма, основывающихся только на использовании Т-эквивалентности.

Различия операторов истинности и строгой истинности выражаются в следующих теоремах.

T4.9.1 $\vdash \ulcorner A \supset |A$

T4.9.2 $\nvdash |A \supset \ulcorner A$

Также в языке логики FL4 различаются операторы истинности и неложности, эквивалентные в классической логике.

T4.9.3 $\nvdash |A \supset --A$

T4.9.4 $\nvdash --A \supset |A$

4.4. Виды противоречий

Ряд унарных операторов из класса операторов противоречия представим своими таблицами истинности.

A	$\ulcorner A \wedge \rceil A$	$A \,\&\, {\sim}A$	$\lvert A \wedge -A$	$--A \wedge -\lvert A$	$\rceil\rceil A \wedge \rceil\ulcorner A$
T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F
B	F	B	T	F	T
N	F	N	F	T	T

Закон противоречия

В языке логики FL4 выражаются различные формулировки закона противоречия, в том числе те, которые приводил Васильев [*Васильев Н.А.* 1989]. Он различал две.

1-я формулировка закона противоречия, принадлежащего металогике, гласит: «Нельзя объявлять одно и то же суждение истинным и ложным». В языке логики FL4 $\sim(|A \wedge -A)$.

2-я формулировка закона противоречия гласит: «Закон противоречия высказывает несовместимость утверждения и отрицания». В языке логики FL4 $\sim(A \wedge \sim A)$. Последняя формула соответствует формулировке этого закона в классической пропозициональной логике.

Тарский отмечает, что семантический закон противоречия не следует отождествлять с родственным ему законом противоречия, не включающим в себя термин «истинно».

Имеем следующие утверждения, выражающие закон противоречия или его нарушение.

Для следующей пары операторов утверждения и отрицания имеет место закон противоречия

T4.10.1 $\vdash \rceil(\lceil A \wedge \rceil A)$.

Для ряда других пар операторов закон непротиворечия не имеет места, в частности:

T4.11.1 $\nvdash \sim(A \ \& \sim A)$.

T4.11.2 $\nvdash -(|A \wedge -A)$.

T4.11.3 $\nvdash -|(--A \wedge -|A)$.

T4.11.4 $\nvdash \rceil(\rceil\rceil A \wedge \rceil\lceil A)$

Принцип, из противоречия следует что угодно, соблюдается для следующих пар операторов:

T4.12.1 $\vdash (\lceil A \wedge \rceil A) \supset B$

T4.12.2 $\vdash (A \ \& \sim A) \supset B$

Этот принцип, из противоречия следует что угодно, не соблюдается для других пар операторов, что позволяет использовать эти операторы для анализа и построения релевантных и паранепротиворечивых логик.

T4.13.1 $\nvdash (|A \wedge -A) \supset B$

T4.13.2 $\nvdash (--A \ \wedge -|A) \supset B$

T4.13.3 $\nvdash (\rceil\rceil A \wedge \rceil\lceil A) \supset B$

В языке логики FL4 различаются ложь и противоречие, неразличимые в CL.

Упорядочение противоречий «по силе»

T4.14.1 $\nvdash (|A \wedge -A) \supset (A \ \& \sim A)$

T4.14.2 $\vdash (A \ \& \sim A) \supset (|A \wedge -A)$

T4.14.3 $\vdash (A \ \& \sim A) \supset\subset (\lceil A \wedge \rceil A)$

T4.14.4 $\nvdash (A \,\&\, {\sim}A) \to^{s} (\ulcorner A \wedge \urcorner A)$

T4.14.5 $\vdash (\ulcorner A \wedge \urcorner A) \to^{s} (A \,\&\, {\sim}A)$

4.5. Виды тавтологий. Различные формулировки законов логики

Ряд унарных операторов из класса операторов <u>тавтологий</u> представим своими таблицами истинности.

A	$\ulcorner A \vee \urcorner A$	$A \vee {\sim}A$	$\lvert A \vee -A$	$--A \vee -\lvert A$	$\urcorner\urcorner A \vee \urcorner\ulcorner A$
T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
B	F	B	T	F	T
N	F	N	F	T	T

Закон исключенного третьего

Критика классического закона исключенного третьего являлась одной из предпосылок построения неклассических логик. Имеется несколько формулировок этого закона, эквивалентных между собой в рамках классической логики, и различающихся по силе для неклассических логик.

Так, Аристотель формулировал закон исключенного третьего следующим образом: «Оба утверждения A и не-A не могут быть одновременно ложными». В языке логики FL4 ему соответствует формула ${\sim}(-A \wedge -{\sim}A)$.

В другой формулировке, называемой tertium non datur, закон исключенного третьего выражается так: «Одно из утверждений A или не-A должно быть истинным». Символически $(\lvert A \veebar \lvert {\sim}A)$.

Я.Лукасевич различал принцип исключенного третьего и «принцип, что *каждое высказывание либо истинно, либо ложно*». Последний он называл *«принципом двузначности»* [16]. Закон (принцип) бивалентности или двузначности символически записывается в языке логики FL4 как $(\lvert A \veebar -A)$, где $\veebar$ символ исключающей дизъюнкции. Часто его записывают как $(\lvert A \vee -A)$. Эти формулы эквивалентны друг другу при наличии соответствующего закона непротиворечия.

А.Тарский отмечал, что семантический закон исключенного третьего не следует отождествлять с законом исключенного третьего, не включающим в себя термина «истинно». Последний в языке CL формулируется как $(A \vee {\sim}A)$.

Некоторые тавтологии можно рассматривать как выражение закона исключенного третьего.

Введем определение оператора классичности как сокращение формулы, выражающей закон бивалентности.

D4.2. $\mathbf{C}(A) =_{df} (|A \underline{\vee} -A)$

Имеем следующие утверждения, выражающие закон исключенного третьего или его нарушение.

Для пары операторов утверждения и отрицания ($\rceil\rceil$, $\rceil\lceil$) имеет место закон исключенного третьего.

T4.15.1 $\vdash (\rceil\rceil A \vee \rceil\lceil A)$

Для оператора $\rceil$ имеет место интуиционистский по форме вариант закона исключенного третьего.

T4.15.2 $\vdash \rceil\rceil(A \mathrm{V} \rceil A)$

Для ряда других пар операторов закон исключенного третьего не имеет места, в частности:

Другой (дуальный) подбор пар

T4.16.1 $\nvdash (A \mathrm{V} {\sim}A)$

T4.16.2 $\nvdash (|A \vee -A)$

T4.16.3 $\nvdash (\lceil A \vee \rceil A)$

Для формул, представляющих собой различные формы закона исключенного третьего, имеются следующие соотношения.

T4.17.1 $\vdash (\lceil A \vee \rceil A) \equiv (|A \underline{\vee} -A)$

T4.17.2 $\vdash (|A \underline{\vee} -A) \supset (|A \vee -A)$

T4.17.3 $\nvdash (|A \vee -A) \supset (|A \underline{\vee} -A)$

T4.17.4 $\vdash (A \mathrm{V} {\sim}A) \supset (|A \vee -A)$

T4.17.5 $\nvdash (|A \vee -A) \supset (A \mathrm{V} {\sim}A)$

T4.17.6 $\nvdash (--A \vee -|A)$

В соответствии с утверждением Тарского, что из определения истины следуют семантические законы противоречия и исключенного третьего, в логике FL4 из утверждения $(|A \equiv^{S} A)$, аналогичного Т-схеме Тарского, следуют подобные вышеупомянутым законы:

$\vdash (|A \equiv^{S} A) \supset -(|A \wedge -A)$,

$\vdash (|A \equiv^{S} A) \supset (|A \vee -A)$,

$\vdash (|A \equiv^{S} A) \supset (|A \underline{\vee} -A)$.

4.6. Бивалентные и трехвалентные формулы

Содержательно под бивалентными формулами понимаются 1-формулы, которые принимают значение T или F при любых значениях, которые могут принимать входящие в них переменные.

Содержательному пониманию бивалентных формул соответствует следующее метаопределение.

D4.3.1 A есть бивалентная 1-формула, если и только если для нее имеет место $\vee^2(|A,-A)$.

Сокращение для «A есть бивалентная 1-формула» bv(A).

Имеются следующие метатеоремы о классах бивалентных формул.

T4.18.1 *Класс бивалентных формул включает* 16 *классов* 4-*эквивалентности* 1-*формул.*

T4.18.2 *В каждом классе* D-*эквивалентности имеется один подкласс* 4-*эквивалентности бивалентных формул.*

В определении D4.3.1 фигурирует формула $\vee^2(|A,-A)$, являющаяся условием бивалентности. Кроме этой формулы имеются и другие, которые могут служить условием бивалентности.

Имеется еще три подкласса D-эквивалентных формул, которые могут быть условиями бивалентности.

В классе тавтологий рассмотрим подробнее подкласс D-эквивалентности 1-формул, которые могут служить условиями бивалентности. Определим условия в каждом из четырех подклассов 4-эквивалентности. Будем обозначать условия символами $bv_{ij}(A)$. Смысл индексов усматривается из таблиц истинности для этих формул.

D4.3.2.1 $bv_{FF}(A) =_{df} \vee^2(|A,-A)$.

D4.3.2.2 $bv_{BN}(A) =_{df} (A \vee \sim A)$.

D4.3.2.3 $bv_{BF}(A) =_{df} (A \,\&\, |A) \vee (\sim A \,\&\, -A)$

D4.3.2.4 $bv_{FN}(A) =_{df} (A \,\&\, --A) \vee (\sim A \,\&\, -|A)$

Метаобозначением для всех условий бивалентности пусть будет выражение bv(A).

Этим формулам соответствуют следующие истинностные таблицы:

A	$\vee^2(\mid A,-A)$	$bv_{FN}(A)$	$bv_{BF}(A)$
T	T	T	T
F	T	T	T
B	F	F	B
N	F	N	F

Условия трехвалентности

Содержательно под трехвалентными формулами понимаются 1-формулы, которые принимают значение T, F, B или T, F, N при любых значениях, которые могут принимать входящие в них переменные.

Содержательному пониманию трехвалентных формул соответствует следующее метаопределение.

D4.3.3 A есть трехвалентная 1-формула, если и только если для нее имеет место $(\mid A \vee -A)$ или $-(\mid A \wedge -A)$.

(сокращенно 3Bv(A), 3Nv(A))

Имеются следующие метатеоремы о классах трехвалентных формул.

T4.3.7.1 *Класс трехвалентных формул* 3Bv (*или* 3Nv) *включает* 24 *класса* 4-*эквивалентности* 1-*формул.*

T4.3.7.2 *В каждом классе* D-*эквивалентности имеется менее трех подклассов* 4-*эквивалентности трехвалентных формул.*

В определении D4.3.4 фигурируют формулы $(\mid A \vee -A)$ и $-(\mid A \wedge -A)$, являющиеся условием трехвалентности. Кроме этих формул имеются и другие, которые могут служить условием трехвалентности.

Имеется по два подкласса классов D-эквивалентных формул, которые могут быть условиями трехвалентности.

В классе тавтологий рассмотрим подробнее классы D-эквивалентности 1-формул, которые могут служить условиями трехвалентности. Определим условия в каждом из двух подклассов 4-эквивалентности этих классов. Будем обозначать условия символами $3Bv_i(A)$ и $3Nv_i(A)$. Смысл индексов усматривается из таблиц истинности для этих формул.

D4.3.4.1 $3Bv_F(A) =_{df} (\mid A \vee -A)$.

D4.3.4.2 $3Bv_N(A) =_{df} (A \vee -A)$.

D4.3.4.3 $3Nv_F(A) =_{df} (--A \vee - \mid A)$

D4.3.4.4 $3Nv_B(A) =_{df} (A \vee - \mid A)$

Метаобозначением для всех условий трехвалентности пусть будет выражение 3v(A).

Этим формулам соответствуют следующие истинностные таблицы:

A	$3Bv_F(A)$	$3Bv_N(A)$	$3Nv_F(A)$	$3Nv_B(A)$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	T
B	T	T	B	B
N	F	N	T	T

4.7. 15 областей универсума предложений

Для универсума *S* всех ппф языка логики FL4 имеется 14 непустых собственных подмножеств (областей), которые можно рассматривать как объединения *T*, *F*, *B*, *N*-областей: *TFB*, *TFN*, *TBN*, *FBN*, *TB*, *FN*, *FB*, *TN*, *TF*, *BN*, *T*, *F*, *B*, *N*-области.

Также унарные операторы можно рассматривать в соответствии с тем, в какой области они выполняются. Так оператору строгой истинности ⌈ отвечает *T*-область.

Оператору истинности | отвечает *TB*-область, которую будем сокращенно обозначать *t*-областью.

Также назовем *FB*-область, отвечающую оператору ложности –, *f*-областью. *TF*-область строгой истинности или строгой ложности, то есть область классической двузначности, обозначим как *Cl*-область.

Используя операцию разности \ алгебры множеств, обозначим следующим образом области универсума: *S\N*, *S\B*, *S\F*, *S\T*, *t*, *S\t*, *f*, *S\f*, *Cl*, *S\Cl*, *T*, *F*, *B*, *N*-области.

Для каждого из 15 непустых подмножеств универсума *S*, включая сам универсум *S*, имеется унарный оператор (1-формула), который выполняется на этом подмножестве.

Также для каждой из 14 непустых областей универсума *S* можно построить свои логические системы, присоединяя к FL4 соответствующие аксиомы.

Классификацию 1-формул завершим утверждением относительно подсистем логики FL4.

D4.4.1 *Исчисление полно относительно преобразования* – (~), *если для каждой формулы* A *либо* ⊢ A, *либо присоединение* A *в* *качестве аксиомы делает исчисление противоречивым относительно этого преобразования.*

D4.4.2 *Исчисление абсолютно полно, если для каждой формулы* A *либо* ⊢ A, *либо присоединение* A *в качестве аксиомы делает исчисление абсолютно противоречивым.*

T4.19.1 FL4 *не является полной относительно* – и ~.

T4.19.2 FL4 *не является абсолютно полной.*

Также имеется теорема T2.7.2 о функциональной неполноте логики **FL4** .

Из этих теорем следует, что логика ложности FL4 допускает присоединение дополнительных аксиом.

T4.20. Н*е выводимые в логике* FL4 1-*формулы только из трех различных классов* D-*эквивалентных* 1-*формул могут быть непротиворечиво присоединены в качестве аксиом к* FL4. *Формулами, представляющими эти три класса, являются следующие*:

$$(|A \vee -A),\ (-|A \vee --A),\ (\ulcorner A \vee \urcorner A).$$

В результате таких присоединений получаем следующие три определяемые ниже логики: FL3B, FL3N, FL2, которые будут сублогиками логики FL4.

5. Алгебра ложности FA4

Алгеброй характеристической матрицы $\mathfrak{M}^{FL4}$ является алгебра, которую будем символически обозначать как FA4-алгебру.

FA4 $= <\{T,F,B,N\}, -, \to>$

Операции алгебры, чтобы не умножать число символов, обозначим теми же символами, что и соответствующие логические операторы.

По аналогии с алгеброй истины, которую Бек [*Back R.J.R.* 1986] ввел для интерпретации логики истины фон Вригта, назовем FA4-алгебру алгеброй ложности.

Имеем следующую теорему о подалгебрах алгебры FA4.

T5.1. *Для алгебры ложности* FA4 *существует только три подалгебры, а именно*:

FA2 $= <\{T,F\}, -, \to>$,

FA3B $= <\{T,F,B\}, -, \to>$,

FA3N $= <\{T,F,N\}, -, \to>$.

На остальных непустых подмножеств множества $\{T,F,B,N\}$, операции $-$ и $\to$ незамкнуты.

Пусть B есть булева решетка на множестве B $= \{1,0\}$ с отношением порядка $\leq$ и дополнением $-$, т. е.

$B = <\{1,0\}, -, \leq>$

T5.2. Алгебра FA2 изоморфна булевой решетке B.

$<\{T,F\},-,\to>$ изоморфна $<\{1,0\},-,\leq>$.

FA4-алгебру можно представить, используя булеву решетку B, следующим образом.

Пусть M $= \{T,F,B,N\}$ есть декартово произведение множества B на B, т. е. $M = B \times B$. Тогда элемент m, принадлежащий множеству M, т. е. $(m \in M)$, рассматриваем как пару, состоящую из элементов m_1, m_2, принадлежащих множеству B, т.е. $(m_1 \in B)$, $(m_2 \in B)$.

Таким образом $m = <m_1, m_2>$

Принимаем следующие соотношения:

5.1. $T = <1,1>$, $F = <0,0>$, $B = <1,0>$, $N = <0,1>$.

Операции задаем покомпонентно следующим образом:

5.2.1 $-m = \langle -m_2, -m_2 \rangle$

5.2.2 $(m \to w) = \langle (m_2 \leq w_1), (m_1 \leq w_2) \rangle$

Отметим, что FA4 не является декартовым произведением булевых решеток B.

Среди сублогик[1] логики FL4 наибольшее значение имеют логические системы, соответствующие подалгебрам FA4 и соответственно областям *TFB*, *TFN*, *TF*.

Определения сублогик логики FL4

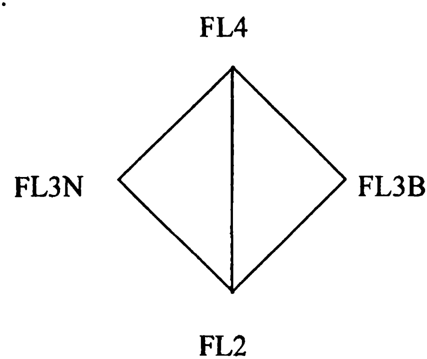
Алгебрам ложности FA3B, FA3N, FA2 соответствуют логики FL3B, FL3N, FL2, определяемые следующим образом.

D5.1 FL3B есть логика, получаемая присоединением к аксиомам FL4 формулы $(|A \vee -A)$.

D5.2 FL3N есть логика, получаемая присоединением к аксиомам FL4 формулы $(-|A \vee --A)$.

D5.3 FL2 есть логика, получаемая присоединением к аксиомам FL4 формулы $(\lceil A \vee \rceil A)$.

Соотношение логик ложности выражается следующей диаграммой, в которой сублогики располагаются ниже соответствующих логик.



Для сублогик логики FL4 имеем следующие метатеоремы:

T5.3.1. FL3B *не является абсолютно полной логикой.*

T5.3.2. FL3B *является функционально предполной логикой.*

---

[1] Выбор префикса суб- или супер- здесь обуславливается соответствием алгебрам. Отметим, что возможно и иные сопоставления.

T5.3.3. FL3N *не является абсолютно полной логикой.*

T5.3.4. FL3N *является функционально предполной логикой.*

T5.3.5. FL2 *является абсолютно полной логикой.*

Обсудим далее соотношения сублогик логики ложности FL4 с рядом известных логик.

6. Сублогики логики FL4 и их соотношение с трехзначными логиками

В этой главе проведено детальное сопоставление ряда известных логик, приведенных в содержании, на содержательном и формальном уровнях, с трехзначными подлогиками FL3N, FL3B логики ложности FL4, определенными выше.

6.1. Логика FL3N

Проведено сопоставление со следующими логиками:
Логика Клини
Логика Лукасевича
Логика Бочвара
Логики Гейтинга и Геделя
Логика Васильева

Для подлогики FL3N логики ложности FL4 имеют место следующие положения, отличающие ее от последней.

Будем использовать в языке FL3N те же метапеременные для ппф, что и в языке FL4, обращая внимание только на контекст их употребления.

T6.1.1.1 $\vdash_{FL3N} -(|A \wedge -A)$.

T6.1.1.2 $\vdash_{FL3N} \ulcorner A \equiv |A$

T6.1.1.3 $\vdash_{FL3N} \urcorner A \equiv -A$.

T6.1.1.4 $\vdash_{FL3N} -A \equiv (A \to^{S} 0)$

6.1.1. Логика Клини

Логику FL3N имеет смысл сравнивать с логикой Клини со связками в сильном смысле K^{S}_{3} [*Клини С.К.* 1957].

Клини строит трехзначную логику с помощью регулярных таблиц для связок , &, ∨, →, ≡, вводимых в сильном смысле.

Клини использует три истинностных значения: t ("истина"), f ("ложь"), u ("не определено"), или в другом его толковании "известна истинность", "известна ложность", "неизвестно, истинно или ложно" ("неизвестно", "несущественно", "ни истинность, ни ложность не установимы алгорифмически", также означает только отсутствие информации, заключающейся в том, что $Q(x)$ есть t или f). Связкам в сильном смысле логики Клини соответствуют следующие связки FL3N[1].

Логика Клини Логика FL3N

$\overline{\ }$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$ соответствуют ~, &, V, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Таблицы истинности для импликации логики Клини соответствуют таблицам истинности для исходной импликации логики FL3N. Это соответствие позволяет рассматривать таблицу истинности исходной импликации логики FL4 как четырехзначное обобщение исходной импликации логики Клини K^S_3.

Приведем истинностные таблицы для импликаций:

$\rightarrow$	t	f	u
t	t	f	u
f	t	t	t
u	t	u	u

$\rightarrow$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	N	N

Таблицы истинности для отрицания, конъюнкции и дизъюнкции логики Клини соответствуют таковым в логике FL3N, детерминируемым определениями **D2.1.2**, **D3.1.1 - D3.1.3**.

Нерегулярной таблице для полной эквивалентности $\cong$ соответствует трехзначный фрагмент таблицы для S-эквивалентности $\equiv^S$ в логике FL4.

$\cong$	t	f	u
t	t	f	f
f	f	t	f
u	f	f	t

$\equiv^S$	T	F	N
T	T	F	F
F	F	T	F
N	F	F	T

Пользуясь соответствием между $\cong$ и $\equiv^S$ можем ввести следующие определения в языке K^S_3, обогащенном оператором полной эквивалентности $\cong$, которую обозначим $K^S_3(\cong)$.

$(A \rightarrow^S B) =_{df} (A \cong (A \,\&\, B))$.

1 Здесь и далее в таблицах соответствий справа расположены символы связок FL3N, а слева расположены символы логики, сопоставляемой FL3N.

$$0 =_{df} \overline{(A \cong A)}$$

$$-A =_{df} (A \rightarrow^{S} 0)$$

Из этих определений видно, что для того чтобы получить таблично задаваемую логику, функционально эквивалентную FL3N, достаточно к исходным связкам логики Клини K^S_3 добавить нерегулярную связку полной эквивалентности $\cong$.

T6.1.2 *Трехзначная логика Клини с сильными связками, обогащенная полной эквивалентностью,* $K^S_3(\cong)$ *функционально эквивалентна логике ложности* FL3N.

Отметим, что логика $K_3(\cong)$ с сигнатурой $\{\overline{\ \ }, \&, \vee, \rightarrow, \cong\}$ не имеет естественного четырехзначного обобщения, функционально эквивалентного FL4.

Логика Клини со слабыми связками K^W_3

Клини [*Клини С.К.* 1957] строит еще одну трехзначную логику с теми же значениями истинности, что и для K^S_3. Связки в ней предлагается рассматривать в слабом смысле.

Известно, что истинностные таблицы для связок логики Клини, рассматриваемых в слабом смысле, эквивалентны таблицам внутренних связок логики Бочвара с точностью до замены символов истинностных значений.

Таблицы для следующих связок в логике K^W_3 аналогичны таблицам логики Бочвара.

$\overline{\ \ }$, &, $\rightarrow$, соответствуют $\sim$, $\cap$, $\supset^B$.

6.1.2. Логика Бочвара

Бочвар [*Бочвар Д.А.* 1938] строит трехзначную логику B_3 с помощью матриц для связок $\sim$, $\vdash$, 7, $\cap$. Бочвар предлагает рассматривать три истинностных значения: R ("истина"), F ("ложь"), S ("бессмыслица"), а также классифицировать связки, различая внешние и внутренние:

внутреннее отрицание $\sim A$ ("не-А"),
внутренняя логическая сумма $A \cap B$ ("А и В"),
внешнее утверждение $\vdash A$ ("А верно"),
внешнее отрицание $7A$ ("А ложно").

Для внешних связок и префиксированных ими формул имеет место классическая логика.

$\sim$, $\vdash$, 7 соответствуют $\sim$, |, $-$.

Определение для связки $\cap$ в FL4 следующее

D6.1.1 $(A \cap B) =_{df} (A \leftrightarrow B) \& (A \vee B)$.

Импликация $\supset^{B}$ определяется следующим образом

D6.1.2 $(A \supset^{B} B) =_{df} \sim(A \cap \sim B)$.

Приведем истинностные таблицы для импликаций:

$\supset$	R	F	S
R	R	F	S
F	R	R	S
S	S	S	S

$\supset^{B}$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	N
N	N	N	N

Отметим, что в логике Бочвара определимы несколько различных импликаций,.

Имеется более тесная связь логики Бочвара с логикой Клини K^{W}_{3} чем сходство внутренних связок логики Бочвара с аналогичными связками логики Клини.

Покажем, что достаточно логику Клини со слабыми связками K^{w}_{3}, обогатить связкой полной эквивалентности, чтобы для полученной логики, которую обозначим $K^{W}_{3}(\cong)$, имела место функциональная эквивалентность ее логике Бочвара B_3.

Введем следующие определения в полученном языке $K^{W}_{3}(\cong)$, которые понадобятся для определения унарных операторов, подобных внешним операторам логики Бочвара.

D6.2.1. $(A \rightarrow^{w\cong} B) =_{df} (A \cong (A \& B))$.

Приведем таблицу истинности для импликации $\rightarrow^{w\cong}$:

$\rightarrow^{w\cong}$	t	f	u
t	t	f	f
f	t	t	t
u	t	f	t

D6.2.2. $0 =_{df} (A \cong A)$ см. выше

Внутренним связкам логики Бочвара B_3 $\sim$ и $\cap$, как известно, можно сопоставить связки $^{-}$ и & логики Клини K^{W}_{3} соответственно. Определим в языке логики $K^W_3(\cong)$ внешние операторы $\vdash$ "верно" и 7 "ложно" логики Бочвара.

D6.2.3.1 $\quad 7A =_{df} (A \rightarrow^{w\cong} 0)$

Или лаконичнее, без введения импликации $\rightarrow^{w\cong}$

D6.2.3.2 $\quad 7A =_{df} (A \cong 0)$

D6.2.4. $\quad \vdash A =_{df} 7{\sim}A$

В обратную сторону достаточно определить в языке логики Бочвара связку полной эквивалентности.

D6.2.5 $\quad (A \cong B) =_{df} (\vdash A \equiv \vdash B) \cap (7A \equiv 7B))$.

Этих соотношений достаточно для доказательства теоремы.

T6.2. *Логика Клини со связками в слабом смысле, обогащенная связкой полной эквивалентности,* $K^W_3(\cong)$ *функционально эквивалентна логике Бочвара* B_3.

Логика неопределенности

А.М.Анисов [*Анисов А.М.* 1997] строит семантику логики неопределенности.

Рассматривается третье значение неопределенность 1/0. Табличными являются оператор отрицания и оператор неопределенности, а бинарные связки нетабличны.

Оператор неопределенности н можно рассматривать в языке FL3N как отрицание оператора классичности C, то есть оператора $-(|A \veebar -A)$.

A	¬A	нA
1	0	0
1/0	1/0	1
0	1	0

A	~A	$-(\|A \veebar -A)$
T	F	F
B	B	T
F	T	F

6.1.3. Логика Лукасевича

На вопрос А.С.Карпенко о функциональной свойствах логики ложности FL3N был получен следующий ответ. Логика ложности FL3N функционально предполна.

Следующим стал вопрос о функциональной эквивалентности трехзначной логики Лукасевича L_3 и логики ложности FL3N.

Сопоставим трехзначную логику Лукасевича логике FL3N.

Лукасевич различает принцип исключенного третьего и “принцип, что *каждое высказывание либо истинно, либо ложно,* то есть может принимать одно и только одно из двух истинностных значений: истинность или ложность. Этот принцип я называю *принципом двузначности.*" ([*Лукасевич Я.* 1993], стр. 203)

Лукасевич вводит третье значение истинности $^1/_2$, исходя из утверждений "... существуют высказывания, которые не являются ни истинными, ни ложными, а лишь только *безразличными.*", "Используя не совсем точную философскую терминологию, можно было бы сказать, что этим высказываниям онтологически не соответствует ни бытие, ни небытие, но лишь *возможность.* Безразличные высказывания, которым онтологически соответствует возможность, имеют третье значение." [*Лукасевич Я.* 1993].

Лукасевич конструирует логику Ł$_3$, в которой исходными связками являются $\to^{Ł}$ и отрицание ~, задаваемые следующими истинностными таблицами, где 0 - ложь, 1 - истина.

A	~A
0	1
$^1/_2$	$^1/_2$
1	0

$\to^{Ł}$	0	$^1/_2$	1
0	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
1	0	$^1/_2$	1

Ни истинным, ни ложным высказываниям, то есть *безразличным* (*indetermine, неопределенным, нейтральным*), в логике Лукасевича соответствуют ни истинные, ни ложные высказывания, то есть индифферентные **I**, в логике ложности FL3N.

Интересно также, что один из смыслов, который Лукасевич придает третьему значению («... существуют высказывания, которые не являются ни истинными, ни ложными, а лишь только *безразличными*» [*Лукасевич Я.* 1993]) *безразлично* (*obojetne*)[2], совпадает со смыслом третьего значения *индифферентно* **I** в логике ложности FL3N.

Таким образом 1, $^1/_2$, 0, соответствуют T, **I**, F.

Импликация Лукасевича $\to^{Ł}$ определяется в языке FL3N следующим образом:

D6.3.1 $(A \to^{Ł} B) =_{df} (A \to B) \vee (A \to^{S} B)$.

Вопрос об интерпретации импликации Лукасевича обсуждается вплоть до настоящего времени. В вышеприведенном определении импликация Лукасевича выражается через исходную

---

[2] Автор признателен Б.Т.Домбровскому за текстологическое исследование. Он пишет, что в статье «O determinizmie» Я.Лукасевич использует термин 'obojetne', которое переводится словом 'безразлично'.

импликацию логики FL3N (импликацию Клини) и импликацию Белнапа (импликацию логики E_{fde}).

Отрицанию и импликации Лукасевича $\rightarrow^{Ł}$ в языке FL3N соответствуют следующие истинностные таблицы.

A	~A
F	T
I	I
T	F

$\rightarrow^{Ł}$	F	I	T
F	T	T	T
I	I	T	T
T	F	I	T

Унарным операторам необходимости N и возможности M логики Лукасевича соответствуют оператор истинности | и оператор ложности ложности – – логики FL3N.

A	NA	MA
0	0	0
$^1/_2$	0	1
1	1	1

A	|A	– –A
F	F	F
I	F	T
T	T	T

Также и в логике Лукасевича $Ł_3$ определимы связки, соответствующие исходным связкам логики ложности FL3N.

$(A \rightarrow B) =_{df} ((\sim A \rightarrow^{Ł} B) \rightarrow^{Ł} B)$

$-A =_{df} \sim MA$

Установленные соответствия доказывают теорему.

T6.3. *Трехзначная логика Лукасевича* $Ł_3$ *функционально эквивалентна логике ложности* FL3N.

Из предыдущей теоремы следует известное соотношение логик $Ł_3$ и K_3 ($\cong$)(см. В.И.Шестаков [*Шестаков В.И.* 1964]).

T6.4. *Трехзначная логика Лукасевича* $Ł_3$ *функционально эквивалентна трехзначной логике Клини с сильными связками, обогащенной полной эквивалентностью.*

Необходимо отметить, что в языке логики ложности возможно несколько различных определений операторов утверждения (включая оператор истинности | и оператор ложности ложности – –) интерпретирующих операторы N и M логики Лукасевича (по 3 для каждого):

D6.3.2.1 $N^T A =_{df} \lfloor A$,
D6.3.2.2 $N^F A =_{df} \lceil A$,
D6.3.2.3 $N^C A =_{df} A \,\&\, |A$,

D6.3.3.1 $M^F A =_{df} - -A$,
D6.3.3.2 $M^T A =_{df} \rceil\rceil A$,
D6.3.3.3 $M^C A =_{df} A \vee - -A$.

Операторы N^T, N^F, N^C (M^F, M^T, M^C) эквивалентны в области трех истинностных значений T, I, F (то есть в языке FL3N), но эти операторы утверждения различаются в области четырех значений (то есть в языке FL4).

Эти 6 унарных операторов из класса операторов утверждения представим своими таблицами истинности.

A	$N^T A$	$N^F A$	$N^C A$	$M^T A$	$M^F A$	$M^C A$
F	F	F	F	F	F	F
I	F	F	F	T	T	T
C	T	F	C	T	F	C
T	T	T	T	T	T	T

Лукасевич выделяет следующие модальности:

1) возможно, что *p* (символически *Mp*)

2) невозможно, что *p* (символически *~Mp*)

3) возможно, что не-*p* (символически *M~p*)

4) невозможно, что *p* (необходимо *p*) (символически *~M~p, Lp*)

Для понятия возможности его определение предложил Тарский и согласился Лукасевич

D6.3.4.1 $MA =_{df} \sim A \to^{Ł} A$,

Истолкование следующее: если из отрицания высказывания выводится само высказывание, то оно не является ложным и, значит не является также невозможным.

Аналогично определение для необходимости

D6.3.4.2 $\sim M \sim A =_{df} \sim(A \to^{Ł} \sim A)$,

Высказывание необходимо в том и только в том случае, если оно не влечет свое собственное отрицание.

В языке FL3N возможна немодальная интерпретация унарных операторов логики Лукасевича.

Используя различные операторы утверждения, определим еще 3 из 4 возможных в языке FL4 классических импликаций.

D6.3.5.1 $(A \supset^C B) =_{df} (\ulcorner A \to (B \& |B))$.

Для этой импликации имеем следующую таблицу:

$\supset^C$	F	I	C	T
F	T	T	T	T
I	T	T	T	T
C	T	T	T	T
T	F	F	C	T

D6.3.5.2 $(A \supset^I B) =_{df} (\ulcorner A \to (B \mathbin{\&} --B))$.

Для этой импликации имеем следующую таблицу:

$\supset^I$	F	I	C	T
F	T	T	T	T
I	T	T	T	T
C	T	T	T	T
T	F	I	F	T

D6.3.5.3 $(A \supset^{IC} B) =_{df} (\ulcorner A \to B)$.

Для этой импликации имеем следующую таблицу:

$\supset^{IC}$	F	I	C	T
F	T	T	T	T
I	T	T	T	T
C	T	T	T	T
T	F	I	C	T

Обобщение трехзначной логики Лукасевича до четырехзначной

Рассмотрим один из вариантов аксиоматизации трехзначной логики Лукасевича, предложенный Е.Слупецким, Г.Брылем и Т.Пруцналем в [*Słupecki J., Bryll G., Prucnal T.* 1967]. Аксиоматизация Ł$_3$ проводится ими в сигнатуре $\{\vee, \sim, N\}$. Будем сокращенно называть это исчисление SBP для удобства отличения его от других аксиоматизаций логики Лукасевича.

Таблицы истинности для отрицания $\sim$ и оператора необходимости N представлены выше, а для дизъюнкции $\vee$ следующая:

$\vee$	0	$^1/_2$	1
0	0	$^1/_2$	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
1	1	1	1

V	F	I	T
F	F	I	T
I	I	I	T
T	T	T	T

Эта таблица соответствует таблице для дизъюнкции V логики ложности FL3N. Поэтому сигнатура исчисления SBP {$\vee$, ~, N} соответствует сигнатуре {V, ~, | }.

Связки V, ~, | определены в языке FL4, а четырехзначные таблицы для них представлены выше.

Добавим к трем истинностным значениям логики Лукасевича четвертое значение истинности и обозначим его цифрой 2.

Теперь расширим таблицы для связок $\vee$, ~, N в соответствии с таблицами для V, ~, | :

A	~A	NA
0	1	0
$^1/_2$	$^1/_2$	0
2	2	1
1	0	1

$\vee$	0	$^1/_2$	2	1
0	0	$^1/_2$	2	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1	1
2	2	1	2	1
1	1	1	1	1

Таким образом задана четырехзначная логика Лукасевича Ł$'_4$ в сигнатуре {$\vee$, ~, N}. При этом таблица истинности для дизъюнкции отличается от таблицы, которая получается для дизъюнкции при собственном четырехзначном обобщении Лукасевича.

Чтобы показать, что полученное четырехзначное обобщение логики Лукасевича Ł$'_4$ функционально эквивалентно четырехзначной логике ложности FL4, определяем оператор ложности – и импликацию $\rightarrow$ как выше. Последних соответствий вместе с приведенными ранее достаточно, чтобы доказать теорему.

Т6.5. *Четырехзначная логика Лукасевича* Ł$'_4$ *функционально эквивалентна логике ложности* FL4.

Тем самым проведено обобщение трехзначной логики Лукасевича до четырехзначной, отличающееся от собственного обобщения Лукасевича.

Дополнительный интерес представляет также сопоставление этих логик на синтаксическом уровне.

Для этого приведем формулировку исчисления SBP [*Słupecki J., Bryll G., Prucnal T.* 1967].

В этой работе предлагается определение импликации[3]

$$(p \supset q) =_{df} \sim\mathrm{N}p \vee q\ ,$$

для которой имеем следующую таблицу истинности:

$\supset$	0	$^1/_2$	1
0	1	1	1
$^1/_2$	1	1	1
1	0	$^1/_2$	1

Таким образом эта импликация соответствует классическим импликациям $\supset^{\mathrm{I}}$, $\supset^{\mathrm{IC}}$, определенным выше.

Приведем аксиомы SBP в переводе с польской системы записи.

Аксиомы SBP

A1 $((p \supset q) \supset r)) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))$

A2 $(p \supset q) \supset ((p \vee q) \supset q))$

A3 $p \supset (p \vee q)$

A4 $p \supset (q \vee p)$

A5 $p \supset \sim\sim p$

A6 $\sim\sim p \supset p$

A7 $\sim (p \vee q) \supset \sim p$

A8 $\sim (p \vee q) \supset \sim q$

A9 $\sim p \supset (\sim q \supset \sim(p \vee q))$

A10 $\mathrm{N}p \supset p$

A11 $\sim\mathrm{N}\sim (p \vee \sim p)$

A12 $\mathrm{N}p \vee \sim\mathrm{N}p$

Правила вывода: подстановка и modus ponens.

Аксиоме A10 этого исчисления соответствует следующая теорема FL3N.

T6.6. $\vdash_{\mathrm{FL3N}} |\mathrm{A} \supset \mathrm{A}$

В то же время формула $|\mathrm{A} \supset \mathrm{A}$ невыводима в FL4.

---

3 Некоторые символы могут совпадать с ранее введенными, но это не должно приводить к недоразумениям, так как они используются только в контексте определенных исчислений.

T6.7. $\nVdash |A \supset A$

На основании последних положений имеет смысл задача так модифицировать SBP (в т.ч. отбрасывая A10), чтобы полученное исчисление SBP′, было эквивалентно FL4.

Сопоставление с четырехзначной логикой Лукасевича

Не для всякой четырехзначной логики ее связки могут быть определены в языке FL4. Такими, в частности, являются четырехзначная логика Я.Лукасевича $Ł_4$, четырехзначная модальная логика Ю.В.Ивлева [*Ивлев Ю.В.* 1991].

Для рассмотрения четырехзначной логики Лукасевича достаточно расширить язык FL4, введя в алфавит отрицание Лукасевича $\sim^{Ł}$, и задать аксиомы для этого отрицания. Полученную логику обозначим как FLNŁ4.

A3.1 $\quad - \sim^{Ł} A \equiv - - A$

A3.2 $\quad |\sim^{Ł} A \equiv -|A$

Импликация Лукасевича $\to^{Ł4}$ определяется в языке логики FLNŁ4.

D6.4. $\quad (A \to^{Ł4} B) =_{df} \sim^{Ł} (A \,\&\, \sim^{Ł} B)$

A	$\sim^{Ł}A$
0	1
$^1/_3$	$^2/_3$
$^2/_3$	$^1/_3$
1	0

$\to^{Ł4}$	0	$^1/_3$	$^2/_3$	1
0	1	1	1	1
$^1/_3$	$^2/_3$	1	1	1
$^2/_3$	$^1/_3$	$^2/_3$	1	1
1	0	$^1/_3$	$^2/_3$	1

T6.8.1 FLNŁ4 *не является полной относительно* $-$, $\sim$ и $\sim^{Ł}$.

T6.8.2 FLNŁ4 *не является абсолютно полной.*

6.1.4. Логики Гейтинга и Геделя

Трехзначную логику H_3 Гейтинг конструирует, вводя третье значение истинности, которое интерпретируется как "неопределенность".

$\sim$, &, $\vee$ соответствуют $\sim$, &, V .

Импликация Гейтинга $\to^{H}$ определяется в FL4 следующим образом

D8.1 $\quad (A \to^{H} B) =_{df} (- - A \to B) \vee (A \to^{S} B)$.

Этой связке соответствует следующая истинностная таблица:

$\to^H$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	F	T

Трехзначный случай логики Геделя - G_3

Таблица для импликации Геделя [*Gödel K.* 1986] совпадает с таблицей импликации Гейтинга.

6.1.5. Логика Васильева

Проведем реконструкцию сентенциального фрагмента воображаемой логики Васильева в рамках логики ложности FL4

Рассмотрим основные положения логики Н.А.Васильева и затем выразим их сентенциальную составляющую в языке FL4 (силлогистика при этом не затрагивается).

В работах Н.А.Васильева металогика отделяется от эмпирической логики и «Понятие логики имеет три смысла,

1. Неэмпирическая логика (металогика) – формальные предпосылки всякой логики
2. Эмпирическая логика – логика реальности.
3. Воображаемая логика» (см в [*Васильев Н.А.* 1989]).

«Все неэмпирические элементы и положения логики будем называть металогикой», «В состав металогики войдут положения, аналогичные тому, что нельзя одно и то же суждение объявлять зараз истинным и ложным»

Основной тезис логики ложности FL4 касается высказываний об истинности и ложности суждений и является неэмпирическим положением. Поэтому FL4 можно отнести, по определениям Н.А.Васильева, к металогике.

Рассмотрим отдельные положения концепции Н.А.Васильева и попробуем выразить их в языке логики ложности.

Н.А.Васильев различает две формулировки закона противоречия.

1-я формулировка закона противоречия [*Васильев Н.А.* 1989].

«Нельзя объявлять одно и то же суждение истинным и ложным»

В языке логики ложности FL4 1-я формулировка выражается следующим образом:

$-(|A \wedge -A)$.

Эта формула не является теоремой FL4.

Принимая это положение за аксиому, то есть присоединяя его к аксиомам FL4, получаем в результате подлогику FL3N логики ложности FL4.

Логика FL3N имеет трехзначную интерпретацию. Трем значениям соответствуют три J-оператора.

Истинностному значению T (истинно и неложно) отвечает оператор строгой истинности $\lceil$.

Отметим, что оператор строгой истинности в языке FL3N эквивалентен оператору истинности, в отличие от языка FL4.

Истинностному значению F (ложно и неистинно) отвечает оператор строгой ложности $\rceil$.

Отметим, что оператор строгой ложности в языке FL3N эквивалентен оператору ложности, в отличие от языка FL4.

Истинностному значению I (индифферентно, то есть ни истинно, ни ложно) отвечает оператор индифферентности $\rfloor$.

Этим операторам соответствуют следующие истинностные таблицы:

A	$\lceil A$	$\rceil A$	$\rfloor A$	~A
T	T	F	F	F
F	F	T	F	T
I	F	F	T	I

2-я формулировка закона противоречия, который, как считает Н.А.Васильев, входит в состав эмпирической логики.

«закон противоречия высказывает несовместимость утверждения и отрицания»

Относительно этого закона Васильев говорит, что «закон противоречия есть тавтология, он уже заключается в определении отрицания».

Это определение отрицания по мнению Васильева базируется на эмпирическом законе нашего мира «реальность отрицания – факт существования несовместимых предикатов».

Поэтому иное отрицание, существующее в каком-либо другом мире, могло быть совместимо с утверждением.

«Тогда мы имели бы три основные формы суждения по качеству:

1) Простое утверждение: *S* есть *P*.

2) Простое отрицание: *S* есть non*P*.

3) Соединение утверждения с отрицанием
(индифферентное суждение): S есть P и non$P$ зараз.

Со всеми этими суждениями мы могли бы оперировать логически.»

Теперь наша задача в том, чтобы найти отрицание, подходящее для воображаемой логики.

В языке FL3N имеется три различных отрицания ~, – и –|.

Для отрицаний – и –| имеет места закон противоречия во 2-й формулировке.

T6.9.1.1 $_{\text{FL3N}}$ – (A & –A)

T6.9.1.2 $_{\text{FL3N}}$ –| (A & –|A)

Только для отрицания ~ не имеет места закон противоречия во 2-й формулировке.

T6.9.2 $_{\text{FL3N}}$ Не имеет места, что ~ (A & ~A)

Также необходимо обойтись внешними операторами вместо внутренних логических операций ‘non’ и ‘и’ в предложениях с субъектно-предикатной структурой.

То есть необходимо найти операторы, удовлетворяющие следующим трем условиям:

$O_1(S_1)$	*A*
$O_2(\sim S_2)$	*E*
$O_3(S_3 \,\&\, \sim S_3)$	*In*

где O_i искомые унарные операторы, S_i некоторые предложения, удовлетворяющие формулы, в которые они входят. Справа стоят обозначения Н.А.Васильевым форм суждений. Здесь, конечно, не рассматривается внутренняя структура предложений S_i.

Этим условиям удовлетворяют J-операторы логики FL3N.

$\ulcorner(S_1)$	соответствует *A*
$\urcorner(S_2)$	соответствует *E*
$\lrcorner(S_3 \,\&\, \sim S_3)$	соответствует *In*

и учитывая, что имеют место следующие тождества.

T4.3 $\ulcorner(S_1) \equiv S_1$

T4.4 $\urcorner(S_2) \equiv \sim S_2$

имеем окончательно

S_1	«*A* (Простое утверждение)»
$\sim S_2$	«*E* (Простое отрицание)»
$\lrcorner(S_3 \,\&\, \sim S_3)$	«*In* (Соединение утверждения с отрицанием, индифферентное суждение)»

Таким образом получаем логику V_3, в которой индифферентным суждениям Васильева соответствуют оператор индифферентности и истинностное значение «индифферентно».

Рассмотренные соотношения, полученные, отметим, без дополнительных предположений, между вышеуказанными неклассическими трехзначными логиками, построенными авторами из весьма несхожих соображений, свидетельствуют о более глубокой связи этих логик между собой, чем это можно усмотреть из их формальных выражений.

6.2. FL3B и паранепротиворечивые логики

Проведено сопоставление со следующими логиками:
Логика Д'Оттавиано - да Коста
Логика антиномий Асенхо
Логика парадоксов Приста
Логика Сетте
Логика Арруды V1
От двух выделенных значений к одному

В.А.Смирнов в 1989 г. поставил перед автором вопрос о соотношении логики с операторами истинности и ложности с паранепротиворечивыми логиками. А.С.Карпенко также обращал внимание автора на связь разрабатываемой им логики с паранепротиворечивыми логиками. В результате были найдены нижеследующие сопоставления логики FL3B (с третьим истинностным значением B «истинно и ложно») ряду трехзначных паранепротиворечивых логик.

Для того чтобы сравнивать связки, определяемые в FL4, со связками трехзначных логик, можно отбрасывать одно из значений B или N. Этой процедуре синтаксически соответствует добавление аксиом, задающих логики FL3N или FL3B. Будем сопоставлять подлогику FL3B с третьим истинностным значением «истинно и ложно» трехзначным паранепротиворечивым логикам.

6.2.1. Логика Д'Оттавиано – да Коста

В логике Д'Оттавиано и да Коста J_3, два выделенных значения – 1, $^1/_2$.

Приведем таблицы истинности для связок.

$\vee$	0	$^1/_2$	1
0	0	$^1/_2$	1
$^1/_2$*	$^1/_2$	$^1/_2$	1
1*	1	1	1

V	F	B	T
F	F	B	T
B	B	B	T
T	T	T	T

Д'Оттавиано, да Коста называют $\neg$ слабым отрицанием, ∇ рассматривают как оператор возможности.

A	$\neg$A	∇A
0	1	0
$^1/_2$*	$^1/_2$	1
1*	0	1

A	~A	|A
F	T	F
B	B	T
T	F	T

Импликация рассматривается не как исходная связка, а как определяемая.

$$(A \to B) =_{df} \neg (\nabla A \wedge \neg B)$$

В [*D'Ottaviano, Itala.M.L., da Costa Newton.C.A.* 1970] вводятся унарные операторы ⌉ [строгое (сильное) или классическое отрицание ⌉ и © оператор классической (абсолютной) истины или лжи (имеет смысл сопоставить оператору © оператор классичности **C**).

$$\rceil A =_{df} \neg \nabla A$$

$$©A =_{df} \rceil (\nabla A \wedge \nabla \neg A)$$

Операторам ⌉ и © языка J_3 в языке FL3B будут соответствовать операторы ⌉ и (|A $\veebar$ –A)

A	⌉A	©A
0	1	1
$^1/_2$*	0	0
1*	0	1

A	⌉A	(|A $\veebar$ –A)
F	T	T
B	F	F
T	F	T

6.2.2. Логика антиномий Асенхо

Ф.Асенхо в докладе 1953, в статье [*Asenjo F.G.* 1966] строит трехзначную логику A_3, вводя в качестве третьего истинностного значения «антиномично».

Таблицы истинности импликации логики Асенхо соответствует таблицам исходной импликации логики ложности FL3B и исходной импликации логики Клини K_3

→	T	F	(T&F)
T*	T	F	(T&F)
F	T	T	T
(T&F)*	T	(T&F)	(T&F)

→	T	F	B
T	T	F	B
F	T	T	T
B	T	B	B

6.2.3. Логика парадоков Приста

Г.Прист в [*Priest G.* 1979] строит трехзначную логику Pr_3, вводя в качестве третьего истинностного значения "парадоксально", которое принимается в качестве второго выделенного значения, которые будем отмечать знаком звездочки *.

“Предложение будем называть парадоксальным, если оно истинно и ложно одновременно. Если предложение истинно и неложно, будем называть его ‘только истинным’ и аналогично для ‘только ложного’ предложения”.

“Предложение А истинно, е.т.е. его отрицание ложно. Отрицание истинного и ложного предложения истинно и ложно, т.е. парадоксально. Отрицание только истинного предложения только ложно. Отрицание только ложного предложения только истинно. Запишем эти результаты в следующей таблице”

A	¬A
*t**	*f*
*p**	*p*
f	*t*

A	~A
T	F
B	B
F	T

“Подобные рассуждения дают следующую таблицу для конъюнкции” и для дизъюнкции.

∧	*t*	*p*	*f*
*t**	*t*	*p*	*f*
*p**	*p*	*p*	*f*
f	*f*	*f*	*f*

&	T	B	F
T	T	B	F
B	B	B	F
F	F	F	F

$\vee$	t	p	f
t^*	t	t	t
p^*	t	p	p
f	t	p	f

V	T	B	F
T	T	T	T
B	T	B	B
F	T	B	F

Исходным связкам логики парадоксов

$\neg, \wedge, \vee$, соответствуют ~, &, V (связки логики FL3B).

Импликация логики парадоксов определяется через исходные связки логики Приста.

$(A \rightarrow B) =_{df} (\neg A \vee B)$

$(A \leftrightarrow B)$ определяется как обычно.

Таблицы истинности импликации логики Приста соответствует таблицам исходной импликации логики ложности FL3B и исходной импликации логики Клини K_3 (отличаясь только двумя выделенными значениями). Приведем истинностные таблицы для импликаций:

$\rightarrow$	t	p	f
t^*	t	p	f
p^*	t	p	p
f	t	t	t

$\rightarrow$	T	B	F
T	T	B	F
B	T	B	B
F	T	T	T

6.2.4. Логика Сетте

В максимальной паранепротиворечивой трехзначной логике Сетте Se_3 [*Sette A.M.* 1973] принимаются два выделенных значения. Она имеет ту особенность, что добавление к ее аксиомам недоказуемой формулы приводит к классической логике.

Отрицанию ~ в логике Сетте соответствует оператор –.

Определим импликацию логики Сетте $\rightarrow^{Se}$.

D6.5.1 $(A \rightarrow^{Se} B) =_{df} (|A \rightarrow |B)$.

T6.11.1 $(A \rightarrow^{Se} B) \equiv (A \rightarrow^{t} B)$

Импликация Сетте отвечает импликации истинности $\rightarrow^{t}$ в FL3B.

Отрицанию и импликации $\rightarrow^{Se}$ соответствует следующие истинностные таблицы:

A	$\sim A$
T_0^*	F
T_1^*	T_0
F	T_0

A	$-A$
T	F
B	T
F	T

$\supset$	T_0	T_1	F
T_0^*	T_0	T_0	F
T_1^*	T_0	T_0	F
F	T_0	T_0	T_0

$\to^{Se}$	T	B	F
T	T	T	F
B	T	T	F
F	T	T	T

Также определяются конъюнкция и дизъюнкция логики Сетте.

D6.5.2 $(A \wedge^{Se} B) =_{df} (|A \wedge |B)$

D6.5.3 $(A \vee^{Se} B) =_{df} (|A \vee |B)$

Для оператора истинности имеется следующее соотношение

T6.11.2 $\vdash |A \equiv ((A \to^{Se} -(A \to^{Se} A)) \to^{Se} -(A \to^{Se} A))$,

которое в логике Сетте может быть использовано для определения оператора истинности.

Отметим, что для анализа своей логики Да Коста [*Da Costa N.C.A.* 1963] использует трехзначные матрицы, с которыми совпадают матрицы логики Сетте.

Так как формула $|A$ принимает выделенное значение T для двух значений T и B, которые может принимать ппф A, то в логике Сетте для проверки формул на общезначимость можно перейти к одному выделенному значению. Для этого достаточно оцениваемую ппф A заменить на формулу с оператором истинности, т. е. на ппф $|A$.

6.2.5. Логика Арруды V1

Для формализации идей Васильева. Арруда [*Арруда А.* 1989] строит трехзначную логику V1.

В ней принимаются два выделенных значения 1, 2.

0, 1, 2 соответствуют F, T, B.

$\sim, \wedge, \vee, \supset$ соответствуют $\sim, \wedge^{Se}, \vee^{Sc}, \to^{Se}$.

Определим отрицание Васильева $\sim^{V1}A$ в FL4 следующим образом.

D6.6 $\sim^{V1}A =_{df} -|A$.

T6.12 $|A \equiv \sim^{V1}\sim^{V1}A$

6.2.6. От двух выделенных значений к одному

В интерпретации паранепротиворечивых логик, которые здесь рассматриваются, принимаются два выделенных значения.

Для логики FL3B принимается одно выделенное значение. Обратим внимание на то, что формула |A языка FL3B принимает выделенное значение T для двух значений T и B, которые может принимать ппф A. Тем самым префиксированная формула |A является тавтологией т.т.т., когда формула A принимает одно из двух значений T или B. Используем этот семантический факт для доказательства следующих метатеорем.

Обозначим общезначимые формулы для паранепротиворечивых логик как $\vDash_{Pc}$.

T6.10.1 $\vDash_{Pc} A \Rightarrow \vDash_{FL3B} |A$

Учитывая семантическую полноту FL3B, имеем теорему.

T6.10.2 $\vDash_{Pc} A \Rightarrow \vdash_{FL3B} |A$

Для логики Приста

T6.10.3.1 $\vDash_{Pr} A \Leftrightarrow \vDash_{FL3B} |A$

Аналогично для логики Асенхо 53

T6.10.3.2 $\vDash_{A} A \Leftrightarrow \vDash_{FL3B} |A$

Из анализа импликативных фрагментов рассматриваемых здесь паранепротиворечивых логик видно, что в логиках Pr_3, AT_3, Se_3, V1 импликации является классическими, т. е. для них выполняются условия теоремы Тарского-Бернайса, а паранепротиворечивость получается за счет введения разных видов отрицания.

7. Условия применимости классической и неклассических логик в рамках языков неклассических логик

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:
Условия применимости классической логики
Условия применимости 3-хзначных логик

В философских рассуждениях, использующих как двузначные высказывания, так и противоречивые (антиномичные или парадоксальные, одновременно истинные и ложные), бессмысленные (ни истинные, ни ложные) или недоказуемые предложения, не всегда применима классическая логика. Поэтому важно исследовать условия применимости классической логики, а также других логик к различным философским (и не только философским) рассуждениям.

Для того чтобы иметь возможность сформулировать эти условия в рамках заданного логического языка, определим понятие применимости некоторой логики к некоторой правильно построенной формуле A этого языка.

Пусть L_1 и L_2 есть две стандартно определяемые пропозициональные логики такие, что язык логики L_1 есть подъязык логики L_2.

D7.1. Будем говорить, что *логика* L_1 *со связками* $\{C_1, \ldots, C_n\}$ ***применима*** *к* ппф A *языка логики* L_2 (*символически* $Ap(L_1\{C_1, \ldots, C_n\}, A, L_2)$), *если и только если для любой теоремы* T *логики* L_1 *всякая формула* T_i, *являющаяся результатом подстановки* A *вместо всех вхождений одной или нескольких пропозициональных переменных в* T, *доказуема в* L_2.

Таким образом, условия применимости некоторой логики L_1 к некоторой ппф A формулируются относительно логики L_2, в рамках языка которой можно выразить и обосновать эти условия. Необходимо отметить, что сопоставление языков L_1 и L_2 проводится на синтаксическом уровне, в то время как содержательная интерпретация связок и формул этих языков может существенно отличаться.

Установим условия применимости пропозициональной классической логики CL к некоторым ппф языков ряда неклассических логик, причем CL будет играть роль логики L_1, а неклассические логики будут играть роль логики L_2. В качестве последних будут выступать интуиционистская логика IL, трехзначная логика Лукасевича, логика Клини, логика FL4 с оператором ложности.

7.1. Условия применимости классической логики

в рамках языка интуиционистской логики

Пусть символами связок интуиционистской логики IL будут следующие: $\neg, \wedge, \vee, \supset$.

Одним из условий применимости CL к некоторой ппф A языка IL является доказательство формулы $(A \vee \neg A)$ в IL. Сформулируем соответствующую теорему.

T7.1 *Если* ппф $(A \vee \neg A)$ *доказуема в* IL,

то $\mathrm{Ap}(\mathrm{CL}\{\neg, \supset\}, A, \mathrm{IL})$.

Интересно было бы взять в качестве условия применимости CL доказательство более слабой формулы, чем закон исключенного третьего.

в рамках языка логики Лукасевича

Пусть символами связок трехзначной логики Лукасевича $Ł_3$ будут следующие: $\sim, \rightarrow^{Ł}$. Для удобства сопоставления символов языка $Ł_3$ символам других логических языков и установления сходства их содержательной интерпретации заменим символы операторов необходимости N и возможности M соответственно на символы операторов истинности T и неложности $\sim F$. Возможность такой немодальной интерпретации $Ł_3$ была обоснована выше.

Естественно, что доказуемость формулы $(TA \veebar FA)$, выражающей принцип бивалентности (который был отброшен Лукасевичем при построении своей трехзначной логики), может служить условием применимости CL.

Сформулируем теорему для более слабой формулы, чем $(TA \veebar FA)$.

T7.2. *Если* ппф $(TA \vee FA)$ *доказуема в* $Ł_3$, *то* $\mathrm{Ap}(\mathrm{CL}\{\sim, \rightarrow^{Ł}\}, A, Ł_3)$.

Примерами такой ппф А, входящей в формулу, фигурирующую в условии применимости CL, могут служить все ппф вида $(\sim B \rightarrow^{Ł} B)$.

Также условием применимости CL может служить доказуемость формул $(A \rightarrow^{Ł} TA)$ и $(TA \equiv A)$. Последнюю можно рассматривать как упрощенное выражение *T*-схемы Тарского.

Еще одним условием применимости PCL может служить доказуемость формулы $\sim (A \wedge \sim A)$, выражающей закон непротиворечия, который не имеет места в логике Лукасевича. Отметим, что в то же время в логике Лукасевича имеет место закон непротиворечия в другой формулировке: $\sim (TA \wedge FA)$.

в рамках языка логики Клини, обогащенной связкой полной эквивалентности

Будем рассматривать логику Клини со связками в сильном смысле, обогащенную связкой полной эквивалентности, $K^s_3(\cong)$.

Пусть символами связок этой логики будут следующие: $^-$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\equiv$, $\cong$.

Так как логика Клини с сильными связками, обогащенная связкой полной эквивалентности, $K^s_3(\cong)$ функционально эквивалентна логике Лукасевича $Ł_3$ (см. выше), то для нее имеют место теоремы с аналогичными условиями применимости CL.

T7.3. *Если* ппф $(A \rightarrow TA)$ *доказуема в* $K^s_3(\cong)$,
то $Ap(CL\{^-, \rightarrow\}, A, K^s_3(\cong))$.

Примерами такой ппф А могут служить все ппф вида $(B \,\&\, TB)$.

в рамках языка логики FL4 с операторами истинности и ложности

Общей чертой неклассических логик является то, что в них не соблюдаются некоторые законы классической логики. В то же время для ряда формул определенного вида, как, например, для ппф вида $\neg\neg p$ интуиционистской логики, для ппф вида Np, Mp логики Лукасевича, имеет место классическая логика, что позволяет выделить в этих логиках и рассматривать два уровня, подобно тому, как предлагал Н.Васильев [1].

Будем использовать разную логику для высказываний А и для высказываний об их истинности *T*A или ложности *F*A.

Сформулируем условия применимости классической логики CL в языке логики FL4 .

Язык логики FL4 содержит две исходные логические константы: $F, \rightarrow$ (соответственно оператор ложности[1] и импликацию).

Имеем следующие теоремы применимости.

Т7.4. *Если* ппф (TA $\veebar$ FA) *доказуема в* FL4, *то* Ap(CL{F, $\rightarrow$}, A, FL4).

Т7.5. *Если* ппф (TA $\leftrightarrow$ A) *доказуема в* FL4, *то* Ap(CL{F, $\rightarrow$}, A, FL4).

Содержательно эти теоремы означают, что условиями применимости классической логики к формуле А (в рамках логики FL4{F, $\rightarrow$} с исходными связками: оператором ложности и импликацией) являются доказательства закона бивалентности или схемы Тарского, имеющие место для этой формулы А.

Также формулой, фигурирующей в условии применимости CL, может служить закон тождества (A $\rightarrow$ A).

Т7.6. *Если* ппф (A $\rightarrow$ A) *доказуема в* FL4, *то* Ap(CL{F, $\rightarrow$}, A, FL4).

Примером такой ппф А, для которой соблюдаются условия применимости, могут служить как префиксированные ппф вида FB, так и смешанные ((FB $\wedge$ FTB) $\rightarrow$ B).

В языке логики FL4 можно сформулировать не только классическую логику CL, но и логики Лукасевича L_3 и Клини K^s_3 (см. выше). Поэтому найдем в свою очередь в этом языке условия применимости логики Лукасевича и логики Клини, обогащенной связкой полной эквивалентности, K^s_3 ($\cong$).

7.2. Условия применимости 3-хзначных логик

Условия применимости логик L_3 и K^s_3 ($\cong$) к некоторым ппф языка логики FL4

Связки логики Лукасевича выразимы в языке логики FL3N, которая является подлогикой, имеющей трехзначную интерпретацию с истинностными значениями T, F, N, логики FL4 (см. выше).

Условия применимости логики Лукасевича L_3:

[1] Для удобства сопоставления различных языков логик, символ оператора ложности –, употребляемый выше, здесь заменен на F. Отметим также, что в FL4 различаются отрицание и оператор ложности, которые в классической логике отождествляются.

T7.7. *Если* ппф $\sim(T\mathrm{A} \wedge F\mathrm{A})$ *доказуема в* FL4,
то Ap($\mathrm{L}_3\{\sim, \rightarrow^{\mathrm{L}}\}$, A, FL4).

То есть условием применимости L_3 может служить доказуемость формулы $\sim(T\mathrm{A} \wedge F\mathrm{A})$, выражающей закон противоречия.

Примерами такой ппф A могут служить все ппф вида (B & FFB).

Связки логики Клини выразимы в языке логики FL3N (см. выше).

Условия применимости логики Клини со связками в строгом смысле, обогащенной связкой полной эквивалентности, $\mathrm{K}^{s}_{3}(\cong)$:

T7.9. *Если* ппф $(T\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A})$ *доказуема в* FL4,
то Ap($\mathrm{K}^{s}_{3}(\cong)\{^{-}, \rightarrow, \cong\}$, A, FL4).

Примерами такой ппф A могут служить все ппф вида $(\mathrm{A} \rightarrow T\mathrm{A})$.

8. Обогащение языка логики FL2 кванторами

Для дальнейшего рассмотрения и исследования предикатов и производных от них операторов истинности и ложности построим исчисления, в которых в языки логик **FL2** и **FL4** добавлены кванторы.

Понятия истинности и ложности рассматриваются как предикаты в высказываниях вида:
"Предложение 'S_1' истинно", "Предложение 'S_2' ложно", в которых имена предложений образованы с помощью функции цитирования и в которые вместо S подставляются предложения.

Имеется два варианта введения кванторов. Один состоит в введении квантора по индивидным переменным для имен предложений, второй состоит в введении квантора всеобщности по переменной для предложений (сентенциальной переменной). Второй вариант подобен использованию кванторов с пропозициональными переменными в качестве операторных переменных в расширенном пропозициональном исчислении Лукасевича-Тарского, Рассела, в прототетике Лесневского.

Будем обогащать язык логики **FL2** исходя из второго варианта употребления кванторов.

Содержательные положения, на которых основывается такое исчисление, такие же, как в главе 1.

Начнем с классического случая.

В качестве исходных связок для **FL2** использовался оператор ложности и импликация.

Константу «ложь» в обогащенном языке исчисления можно определить иначе, чем в **FL2**, подобно тому как эта константу можно определить в расширенном пропозициональном исчислении $0 =_{df} \forall s\, s$. Это обстоятельство позволяет использовать в качестве исходного оператор истинности вместо оператора ложности, так как оператор ложности можно будет определить в таком языке.

Сформулируем язык исчисления истинности **TC2** (исчисления с оператором истинности).

Язык исчисления истинности TC2

Алфавит TC2:

$s, s_1, s_2, \ldots$ сентенциальные переменные;

$|$ символ оператора истинности;

$\to, \forall$ логические константы (импликация, квантор общности);

(,) технические символы.

Правила образования ппф

8.1.1. Всякая сентенциальная переменная есть ппф.

8.1.2. Если A, B есть ппф и x есть сентенциальная переменная, то $(A \to B)$, $|A$, $\forall x\, A$ есть ппф.

8.1.3. Ничто иное не есть ппф.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф;
x для сентенциальных переменных.

Определим формулу 0, являющуюся тождественно ложной, которая будет играть роль константы «ложь»

D8.1 $0 =_{df} \forall s\, |s$.

Определим отрицание ~, соответствующее исходной импликации →

D8.2 $\sim A =_{df} (A \to 0)$.

Высказывание о ложности предложения ‘S’ рассматривается как сокращение для высказывания о истинности отрицания предложения ‘S’. Формулу с оператором ложности будем рассматривать как сокращение следующей формулы:

D8.3 $-A =_{df} |\sim A$.

Определим высказывание о строгой истинности, то есть об истинности и неложности, предложения ‘A’ (“$\ulcorner$” содержательно означает “есть истинно и неложно”):

D8.4 $\ulcorner A =_{df} -(|A \to -A)$

Определим D-импликацию ⊃

D8.5 $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \to \ulcorner B)$.

Выделим подкласс T.F.-формул (T.F.-ф.), для которых будут иметь место аксиомы и правила вывода исчисления классической логики.

8.2.1. Если A есть ппф, то $|A$, есть T.F.-ф.

8.2.2. Если P, P_1, P_2 есть T.F.-ф. и x есть сентенциальная переменная, то $(P_1 \to P_2)$ и $\forall x\, P$ есть T.F.-ф.

8.2.3. Ничто иное не есть T.F.-ф.

Пусть P, P_1, P_2, ... есть метапеременные для T.F.-ф.

D8.6.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D8.6.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D8.6.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

Схемы аксиом

A8.1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A8.1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A8.1.3 $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

A8.1.4 $|P \equiv P$

A8.1.5 $\forall x\, P(x) \supset P(A)$, если ппф A свободна для x в P(x).

A8.1.6 $\forall x\, (P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset \forall x\, P_2))$, если P_1 не содержит свободных вхождений x.

К этим схемам аксиом добавим следующие:

A8.2.1 $|(A \rightarrow B) \equiv (-A \vee |B)$,

A8.2.2 $-(A \rightarrow B) \equiv (|A \wedge -B)$,

A8.3 $(|A \veebar -A)$.

Правила вывода

$$\frac{A,\ (A \supset B)}{B} \quad \text{MP}$$

$$\frac{A}{\forall x\, A} \quad \text{Gen}$$

Как показано у Черча [*Чёрч А.* 1960] расширенное пропозициональное исчисление сводимо к классической пропозициональной логике **CL**. Аналогично этому можно показать, что исчисление **TC2** сводимо к **FL2**.

Имеем теорему, связывающую различные определения (имеющие разный смысл) константы «ложь» в исчислении **TC2** и в расширенном пропозициональном исчислении.

T8.1 $\forall s\, |s \equiv \forall s\, s$

Следующим шагом будет переход к неклассическому случаю, в котором мы отказываемся от принципа бивалентности.

В результате получим исчисление с оператором истинности **TC4**.

Сформулируем язык этого исчисления.

Язык исчисления предиката истинности TC4

Алфавит TC4:

$s, s_1, s_2, \ldots$ сентенциальные переменные;

$|$ символ оператора истинности;

$\to, \forall$ логические константы;

(,) технические символы.

Правила образования ппф

8'.1.1. Всякая сентенциальная переменная есть ппф.

8'.1.2. Если A, B есть ппф и x есть сентенциальная переменная, то $(A \to B)$, $|A$, $\forall x\, A$ есть ппф.

8'.1.3. Ничто иное не есть ппф.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф;
x для сентенциальных переменных.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок. Введем следующие

сокращения.

D8'.1.1 $0 =_{df} \forall x \,|\, x$ (константа «ложь»)

D8'.1.2 $\sim A =_{df} (A \to 0)$ (отрицание).

D8'.1.3 $-A =_{df} |\sim A$. (оператор ложности).

D8'.1.4 $\ulcorner A =_{df} -(|A \to -A)$ (строго истинно)

D8'.1.5 $(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \to \ulcorner B)$ (D-импликация).

Выделим подкласс T.F.-формул (T.F.-ф.), для которых будут иметь место аксиомы и правила вывода классической логики.

8'.2.1. Если A есть ппф, то $|A$, есть T.F.-ф.

8'.2.2. Если P, P_1, P_2 есть T.F.-ф. и x есть сентенциальная переменная, то $(P_1 \to P_2)$ и $\forall x\, P$ есть T.F.-ф.

8'.2.3. Ничто иное не есть T.F.-ф.

Пусть P, P_1, P_2, ... есть метапеременные для T.F.-ф.

D8'.1.6.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D8'.1.6.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D8'.1.6.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

Схемы аксиом

A8'.1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A8'.1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A8'.1.3 $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

A8'.1.4 $|P \equiv P$

A8'.1.5 $\forall x\, P(x) \supset P(A)$, если ппф A свободна для x в P(x).

A8'.1.6 $\forall x\, (P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset \forall x\, P_2))$, если P_1 не содержит свободных вхождений x.

A8'.2.1 $|\,(A \to B) \equiv (-A \vee |B)$,

A8'.2.2 $-(A \to B) \equiv (|A \wedge -B)$.

Правила вывода

$$\frac{A,\ (A \supset B)}{B} \qquad \text{MP}$$

$$\frac{A}{\forall x\, A} \qquad \text{Gen}$$

Аналогично предыдущему сведению **TC2** к **FL2** можно показать, что исчисление **TC4** сводимо к **FL4**.

9. Символическая логика символьных выражений

Расширение области определения предикатов истинности и ложности

Говоря об объеме термина ‘истинно’, Тарский, как и многие логики и философы, полагает, что «Предикат ‘истинно’ ... относят к определенным физическим объектам – языковым выражениям, в частности, к предложениям» [*Тарский А.* 1998].

Известны трудности, связанные с определением того, что есть высказывание и предложение. Так, Карри пишет, что «Термин 'высказывание' (proposition) вызывает большие споры ... Некоторые логики избегают его как отравы; они настаивают на замене этого термина во всех контекстах, где он употребляется как нечто само собой разумеющееся, словом 'предложение'; другие настаивают на его употреблении ...» [*Карри Л.И.* 1969]. Также и Тарский: «Мы не знаем в точности, какие выражения являются предложениями» [*Тарский А.* 1998].

Приведем примеры языковых выражений, которые можно считать или не считать предложениями в зависимости от того, какого взгляда придерживаться на язык.

Волга впадает в Каспийское море.
Дважды два – четыре.
Мощность множества всех множеств бесконечна.
Истина есть благо.
Познай самого себя.
Сократ был любителем мудрости.
Кентавр Хирон был мудр.
Нынешний король Франции лыс.
Бесцветные зеленые идеи яростно спят.

И, наконец, в этом сне разума или на пиру воображения, драматично, но грамматично:

Глокая куздра штеко бодланула бокренка.

Следующей проблемой является оценка некоторых из вышеперечисленных выражений на истинность или ложность.

Будем применять понятия истинности и ложности к предложениям языка, не только двузначным, но и к таким, в отношении которых нельзя говорить, что они либо истинны, либо ложны, тем самым расширяя возможности применения этих понятий. В число последних могут войти метафизические высказывания, которые в соответствии с взглядами логических позитивистов объявляются ими бессмысленными, т.е. ни истинными, ни ложными. Согласно обычным критериям истины, процедурам верификации и фальсификации (которые не сводятся к определению истины) предложение «Бесцветные зеленые идеи яростно спят», относимое Хомским к грамматически правильно построенным предложениям, ни истинно, ни ложно.

Чтобы конъюнкция отрицания истинности и отрицания ложности подобных бессмысленных предложений не превращалась в противоречие, необходимо вслед за Лукасевичем отказаться от принципа двузначности, а также от логической взаимозависимости предикатов истинности и ложности, имеющей место в классической логике и состоящей в том, что отрицание истинности предложения эквивалентно его ложности, а отрицание ложности предложения эквивалентно его истинности. В таком случае логика, конечно, должна быть неклассической.

Такой отказ ведет к расширению сферы применимости понятий истинности и ложности на универсум всевозможных предложений, оставляя вопрос об определении того, что такое предложение, за рамками логики.

Тарский говорит о новых возможностях применимости понятия истины: «тот факт, что нас прежде всего интересует понятие истины для предложений, не исключает возможности последующего расширения сферы применимости этого понятия на другие виды объектов» [*Тарский А.* 1998].

В качестве этих других видов объектов возьмем символьные выражения языка. При этом всякое предложение есть символьное выражение. Те же символьные выражения, которые не являются предложениями, все тривиально ни истинны, ни ложны, как например неправильно построенные формулы. Такое расширение области определения предиката истинности на универсум символьных выражений ведет лишь к небольшому видоизменению формулировки сентенциальной логики с операторами истинности и ложности FL4. Достаточно заменить переменные для предложений переменными для символьных выражений.

Отрицания утверждений об истинности и ложности бессмысленных предложений, именем для которых пусть будет nonsense, и выражений, не являющихся предложениями, именем для которых пусть будет symbex, символически запишем следующим образом:

$$\neg T(\text{nonsense}) \wedge \neg F(\text{nonsense}), \qquad \neg T(\text{symbex}) \wedge \neg F(\text{symbex}).$$

Так как неограниченное применение понятий истинности и ложности ведет к семантическим парадоксам, то чтобы избежать их, в качестве имен предложений и имен символьных выражений, подставляемых в формулу с предикатом истинности, будем, как и ранее, использовать только такие имена, которые образуются из предложений с помощью кавычек, т.е. кавычечной функции или функции цитирования q. Пусть переменной для символьных выражений будет s. Тогда формулы с предикатом истинности и ложности будут выглядеть так: $T(\text{q(s)})$, $F(\text{q(s)})$.

Необходимо отметить, что при таком расширении области определения предиката истинности Т-эквивалентность Тарского не распространяется на универсум символьных выражений, а, значит, определение истины не строится. Вместо этого имеем соотношение

$$(T(\text{q(s)}) \equiv \text{s}) \equiv (T(\text{q(s)}) \veebar F(\text{q(s)})),$$

в котором обусловливают друг друга Т-эквивалентность и принцип двузначности.

Таким образом, если для символьных выражений выполняется Т-эквивалентность, то они являются двузначными, а, значит, высказываниями в соответствии с определением высказывания в классической логике.

С другой стороны, если символьные выражения выполняют принцип бивалентности, т.е. являются двузначными, то для них имеет место Т-эквивалентность.

Логика, в которой область определения предикатов истинности и ложности расширяется до универсума символьных выражений, может быть получена из формулировки классической сентенциальной логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно» **FL2**, отбрасыванием принципа двузначности, а также распространением области определения логических операторов на универсум символьных выражений.

Уточним используемые понятия. Символьным выражением некоторого языка L называется любая конечная линейная последовательность (упорядоченная n-ка) символов из алфавита этого языка L. Синонимом *символьного выражения* являются *слово*, *выражение* или *строка* в алфавите [*Смальян Р.* 1981].

Для однозначного прочтения формул ограничимся в правиле образования символьных выражений подмножеством символьных выражений, имеющих подобие с формулами.

При этом к правилам образования добавляем правило образования символьных выражений и расширяем правила образования ппф и T.F.-формул.

В группе аксиом, задающих условия истинности для импликации, метапеременные для ппф заменяем на метапеременные для символьных выражений. Таким образом, получаем формулировку логики символьных выражений, которая при данном подходе может рассматриваться как обобщение предложенной формулировки классической сентенциальной логики на универсум символьных выражений.

Дополним множество ппф некоторым ограниченным множеством неправильно построенных формул, которые в своем объединении дают достаточную для дальнейшего исследования область символьных выражений. В качестве исходных неправильно построенных формул возьмем символы $\rightarrow$, $\cong$ логических констант (импликации и полной эквивалентности). Это ограничение не снизит общности рассмотрения. В этом частном случае будем называть их для определенности нестандартными формулами (нф).

В дополнение к метапеременным для ппф введем новую метапеременную N, соответствующую нестандартным формулам, зададим дополнительные правила образования и сформулируем дополнительную аксиому для нф, которая будет аналогична вышеприведенному положению.

Формулировка логики ложности SFL4, обогащенная связкой полной эквивалентности

Алфавит SFL4

$s, s_1, s_2, \ldots$ сентенциальные переменные;

$-, \rightarrow, \cong$ логические константы;

(,) технические символы.

Правила образования ппф и нф

(i) Всякая сентенциальная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A, B есть ппф, то $(-A)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \cong B)$ есть ппф.

(iii) Символы логических констант $\rightarrow$, $\cong$ есть нестандартные формулы, сокращенно нф.

(iv) Если A есть ппф или нф, то A есть символьное выражение (св).

(v) Если A есть нф, B есть св, то $(A \rightarrow B)$, $(B \rightarrow A)$ есть нф.

(vi) Если A, B есть св, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть ппф.

Метапеременные: A, B, ... для символьных выражений (св),
N, N_1, ... для нестандартных формул,

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие **сокращения** для формул.

D9.1.1 $f(s) =_{df} -(-s \rightarrow -s)$ (константа "ложь")

D9.1.2 $\sim A =_{df} (A \rightarrow f(s))$ (отрицание)

Конъюнкция &, дизъюнкция V и эквиваленция $\leftrightarrow$ определяются классическим образом.

D9.1.2.1. $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \rightarrow \sim B)$,

D9.1.2.2. $(A \vee B) =_{df} (\sim A \rightarrow B)$,

D9.1.2.3. $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$.

D9.1.3 $|A =_{df} -\sim A$ ('есть истинно')

D9.1.4 $\lceil A =_{df} -(|A \rightarrow -A)$ ('есть истинно и неложно')

D9.1.5 $(A \supset B) =_{df} (\lceil A \rightarrow \lceil B)$ (D-импликация)

Зададим правила образования T.F.-формул (T.F.-ф.)

(vii) Если A, B есть св, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть T.F.-ф.

(viii) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \rightarrow P_2)$, есть T.F.-ф.

Пусть P, P_1, P_2, ... есть метапеременные для T.F.-ф.

D9.2.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D9.2.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D9.2.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

Схемы аксиом

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3 $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.4 $|P \equiv P$ (редукция оператора истинности)

A2.1 $|(A \rightarrow B) \equiv -A \vee |B$ (редукция истинности импликации)

A2.2 $-(A \rightarrow B) \equiv |A \wedge -B$ (редукция ложности импликации)

A4 $(-|N \wedge --N)$

A5 $(A \cong B) \equiv (|A \leftrightarrow |B) \wedge (-A \leftrightarrow -B)$.

Правило вывода

$$\frac{A, (A \supset B)}{B}$$

Назовем полученное исчисление **SFL4($\cong$)**

Так как аксиомы и правило вывода для формул с символьными выражениями такие же, что и в языке логики **FL4**, то и теоремы будут по форме те же.

Аксиома для полной эквивалентности по сути является определением этой эквивалентности. К теоремам, аналогичным теоремам **FL4**, добавится ряд теорем, имеющих несколько непривычный вид.

T9.1 $\nvdash (\rightarrow \rightarrow \rightarrow)$.

T9.2 $\vdash (\rightarrow \cong \rightarrow)$.

T9.3 $\vdash (\cong \cong \cong)$.

Последние теоремы становятся понятнее, если учесть, что частный случай аксиомы A5 для символьного выражения $\cong$ имеет вид:

$$(\cong \cong \cong) \equiv (|\cong \leftrightarrow |\cong) \wedge (-\cong \leftrightarrow -\cong)$$

а формулы $|\cong$ и $-\cong$, входящие в правую часть, есть T.F.-ф.

Кроме логики **FL4** возможно обобщение на универсум символьных выражений и других логик.

Покажем, что обобщение языка логики тавтологических следований $\mathbf{E_{fde}}$ на универсум символьных выражений приводит к логике (обозначим ее как $\mathbf{SE_{fde}}$), функционально эквивалентной **SFL4**.

Характеристическая матрица для E_{fde} есть $<\{T,F,B,N\}, \sim, \&, \vee, \rightarrow^S, \{T\}>$, где $\rightarrow^S$ обозначает импликацию, истинностную таблицу для которой предложил Т.Смайли для логики тавтологических следований E_{fde} (см. выше).

$\to^S$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	T	T	T	T
B	T	F	T	F
N	T	F	F	T

A	$\sim\vert A$	$\vert A$
T	F	T
F	T	F
B	F	T
N	T	F

Обратим внимание на столбец, соответствующий истинностному значению N, которое означает «ни истинно, ни ложно». Он соответствует столбцу, отвечающему отрицанию оператора истинности. Следовательно, можно построить определение оператора в языке **SE**$_{\mathbf{fde}}$, который соответствует оператору истинности в **SFL4**.

$$|A =_{df} \sim (A \to^S \sim)$$

Обратим внимание, что на месте консеквента стоит символ отрицания, который, будучи использован в качестве формулы, не истинен и не ложен, то есть имеет значение N.

Чтобы получить функционально эквивалентную **SFL4** логику, достаточно к истинностным таблицам логики **E**$_{\mathbf{fde}}$ добавить таблицу для оператора истинности. Конечно, при этом речь идет о табличной логике, не ограниченной формулами первого порядка. Из того, что в расширенном языке можно построить определение для оператора, соответствующего оператору истинности в **SFL4**, следует, что табличный вариант логики **SE**$_{\mathbf{fde}}$ эквивалентен **SFL4**.

Особый интерес представляет обобщение логики **FL2** на область нестандартных формул. В этом случае обобщение формулируется в языке логики **FL2** без его обогащения.

Расширение логики FL2 на область нестандартных формул

Обычно неправильно построенные формулы в логике не рассматриваются. Относительно них можно утверждать две вещи: 1) что они бессмысленны и 2) что они ни истинны, ни ложны. В стандартном языке пропозициональной логики невыразим тот факт, что они ни истинны и ни ложны. Однако в предложенном выше языке утверждения о неистинности и неложности формул, являющихся неправильно построенными, можно выразить следующим образом:

$\sim T$(non-wff) & $\sim F$(non-wff),

где словом «non-wff» обозначена некоторая неправильно построенная формула.

Определение неправильно построенной формулы может рассматриваться как парафраз последнего пункта правил образования ппф «Ничто иное не является ппф»: всякое иное выражение данного языка есть неправильно построенная формула.

В качестве исходных неправильно построенных формул возьмем символы –, → логических констант (оператора ложности и импликации). Это ограничение не снизит общности рассмотрения. В этом частном случае будем называть их для определенности нестандартными формулами (нф).

В дополнение к метапеременным A, B, C для ппф введем новую метапеременную N, соответствующую нестандартным формулам, зададим дополнительные правила образования и сформулируем дополнительную аксиому для нф, которая будет аналогична вышеприведенному положению.

A4 $(-| N \wedge - - N)$

Также необходимо ввести в рассмотрение множество символьных выражений языка **FL2** (слов в алфавите **FL2**), как правильно построенных, так и нестандартных, то есть для ппф и нф одновременно. Для них будем использовать метапеременные E, E_1, E_2, …

В правила образования **FL2** введем следующие изменения и дополнения. Вместо пункта (iii) введем введем (iii)* и добавим следующие.

(iii)* Символы логической констант – и → есть нестандартные формулы.

(iv)* Если A есть ппф или нф, то A есть символьное выражение (св).

(v)* Если A есть св, то $(-A)$ есть ппф.

(vi)* Если A есть нф, B есть св, то $(A \to B)$, $(B \to A)$ есть нф.

(vii)* Ничто иное не является ппф, нф и св.

А также в правилах образования для T.F.-ф. пункт (iv) заменим на (iv)**.

(iv)** Если A есть св, то $(-A)$, есть T.F.-ф.

При этом ни одни из ранее принятых аксиом и правил вывода логики **FL2** не изменятся.

Обобщая схемы аксиом A2.1, A2.2, A3 на весь универсум символьных выражений (как правильно построенных, так и нестандартных), необходимо будет ослабить только аксиому А3, отбросив только формулу (|E ∨ –E), соответствующую принципу двузначности в слабой форме, оставив положение, соответствующее закону противоречия.

А3** – (|E ∧ – E).

Правило вывода также обобщается

$$\frac{E_1, (E_1 \supset E_2)}{E_2}$$

В этом языке можно построить определение константы "ложь", отличное от **D1.1.1**., исходя из теоремы

T9.4 (–| – ∧ – – –),

имеющей непривычный вид и содержательно означающей, что выражение ' – ' ни истинно и ни ложно. А также ее следствия, содержательно означающего, что предложение "Выражение ' – ' ложно" ложно.

T9.4.1 (– – –).

Другими словами можно сказать, что предложение "Выражение ' – ' ложно" есть ложь, и ввести следующее определение.

D9.1.1* $0 =_{df}$ (– –) (константа "ложь")

Назовем полученное исчисление **FL3**.

Таблицы истинности для исходных и производных логических операторов ниже.

A	–A	|A
T	F	T
F	T	F
N	F	F

→	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	N	N

Исчисление **FL3** функционально эквивалентно сильной логике Клини, обогащенной клиниевской же связкой полной эквивалентности, а также трехзначной логике Лукасевича. Последнее может быть понято при учете того, что при построении этого исчисления ослаблялся именно принцип двузначности, что являлось для Лукасевича отправной точкой в построении им трехзначной логики.

Также отметим, что полученная логика может быть построена с оператором истинности в качестве исходного, а не с оператором ложности. Это связано с тем, что есть возможность определить константу "ложь" через оператор истинности следующим образом.

В правилах образования **FL3** вводятся следующие изменения: символ логического оператора '−' везде заменяется на символ логического оператора '|'. Также иначе определяется константа "ложь". Определение основывается на утверждении, что предложение "Выражение '|' истинно" ложно, которое является следствием утверждения, что выражение '|' ни истинно, ни ложно. Этим утверждениям содержательно отвечают следующая теорема и ее следствие.

T9.5 $(-|\,|\wedge--|)$,

T9.5.1 $(-|\,|)$.

D9.1.2** $0 =_{df} |\,|$ (константа "ложь")

Определения **D9.1.2*** и **D9.1.2**** показывают взаимосвязь ложности, лжи и бессмысленности, а также истинности, лжи и бессмысленности.

Назовем полученное исчисление **TL3**.

Обогащение логики ложности SFL4 квантором по символьной переменной

Аналогично тому, как от логик ложности **FL2** и **FL4** был совершен переход к исчислениям предикатов истинности **TC2** и **TC4**, можно перейти от логики символьных выражений **SFL4** к исчислению символьных выражений **STC4**.

В завершение отметим ряд шагов, сделанных в процессе построения исчисления символьных выражений:

– от классической одноуровневой сентенциальной (пропозициональной) логики к двухуровневой логике с оператором ложности,

– от последней к исчислению оператора ложности,

– расширение области определения предиката ложности на область символьных выражений,

– переход к исчислению символьных выражений.

Тем самым исчисление символьных выражений может рассматриваться как обобщение и консервативное расширение классического сентенциального исчисления.

Заключение

В монографии была предложена и рассмотрена концепция истины, основанная на аксиоматическом подходе. Сформулированы основные содержательные, семантические и философские положения данной оригинальной концепции истины.

Если в традиционном подходе метаязык и язык-объект и, соответственно, их термины очевидно противопоставляются, то при данном подходе

В отличие от подходов, требующих отделения терминов, имеющих метаязыковое происхождение, от языка-объекта новизна предложенного подхода заключается во введении предикатов и производных от них операторов истинности и ложности непосредственно в объектный язык логики,. Предикат истинности не определяется, а его основные свойства задаются системой аксиом.

В начале строится логика с операторами истинности и ложности, являющаяся по существу аксиоматической синтаксической теорией истины для классического сентенциальной логики. Затем полученное исчисление обобщается и обогащается. При обобщении область определения предикатов и производных от них операторов истинности и ложности расширяется на область предложений, не являющихся двузначными и далее на область символьных выражений языка.

Обогащение производится посредством добавления в язык исчисления квантора по сентенциональным переменым и затем по символьным переменным.

Отметим ряд шагов, сделанных в процессе построения исчисления символьных выражений:

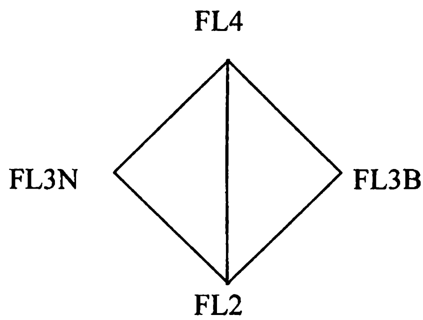
– от классической одноуровневой сентенциальной (пропозициональной) логики к двухуровневой логике с оператором ложности,

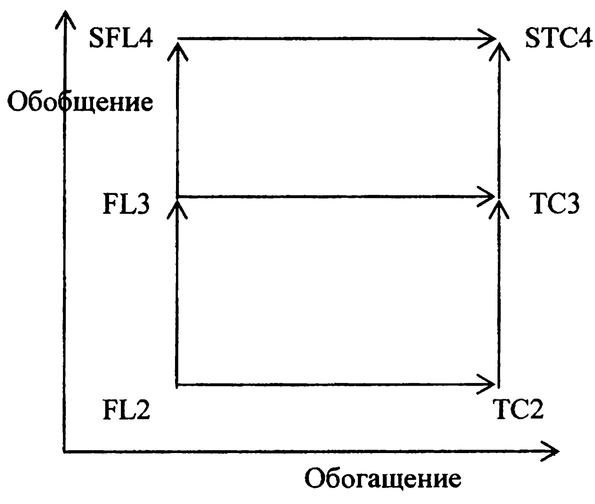
– от последней к исчислению оператора ложности,

– расширение области определения предиката ложности на область символьных выражений,

– переход к исчислению символьных выражений.

Этапы обобщения и обогащения первоначальной логики представим с помощью следующих диаграмм.





Специфической особенностью рассматриваемой в данной монографии логики с предикатами и операторами истинности и ложности является следующее:

Логика с предикатами и операторами истинности и ложности характеризуется также тем, что в ней к высказываниям, префиксированным операторами истинности и ложности применима классическая логика, в то время как к произвольным высказываниям применима неклассическая логика.

В связи с этим в работе было сделано следующее:

- построен последовательный ряд исчислений, реализующих содержательные предпосылки предложенной концепции истины;
- Начиная с формулировки классической сентенциальной логики, обогащенной операторами истинности и ложности, сделано несколько ее обобщений;
- построена логика FL4 с операторами истинности и ложности; в которой можно корректно оперировать, в дополнение к двузначным высказываниям, с высказываниями, содержащими противоречивую и неполную информацию.
- исследованы металогические свойства логики FL4:

  найдена адекватная интерпретация для языка логики FL4 с четырьмя истинностными значениями: T – строгая истинность (истинно и не ложно), F – строгая ложность (ложно и не истинно), C (B) – противоречивость (истинно и ложно), I (N) – индифферентность (ни истинно, ни ложно).

  проведены формальные различия операторов истинности и строгой истинности, ложности и строгой ложности;

  доказана теорема непротиворечивости для логики FL4;

  доказана теорема семантической полноты для логики FL4

  - исследованы соотношения логики FL4 с логиками истины фон Вригта, показано, что одна из логик истины, а именно T"LM функционально эквивалентна FL4; с четырехзначной логикой Белнапа,
- новым является построенное определение импликации для логики Белнапа;
- найдены взаимоотношения сублогик логики FL4 с трехзначными логиками Клини, Лукасевича, Бочвара, функциональная эквивалентность подлогики FL3N, логики ложности трехзначной логики Лукасевича и логики Клини со связками в сильном смысле, обогащенной связкой полной эквивалентности; показано, что логика Бочвара функционально эквивалентна логике Клини со связками в слабом смысле, обогащенной связкой полной эквивалентности;
- для паранепротиворечивых логик Асеньо, Приста, Д'Оттавиано-да Коста показано, что в языке подлогики FL3B возможны

эквивалентные указанным логикам формулировки, для которых имеются адекватные интерпретации с одним выделенным значением.

Вышеназванные трехзначные логики были построены их авторами исходя из весьма несходных предпосылок. И, поскольку отмеченные выше соотношения были получены без дополнительных предположений, это свидетельствуют о более глубокой связи этих логик между собой, чем это можно усмотреть из их формальных выражений.

Рассмотренные соотношения, полученные, отметим, без дополнительных предположений, между вышеуказанными неклассическими трехзначными логиками, построенными авторами из весьма несхожих соображений,

- найдены условия применимости классической логики;
- показана неэлиминируемость предиката истинности в неклассических контекстах;
- показана связь принципа двузначности и *T*-эквивалентности
- в завершение построена символическая логика символьных выражений, в которой область определения предиката истинности и логических операторов включает не только правильно построенные формулы, но и другие символьные выражения языка логики.

Приложение 1

Теоремы классической логики **CL**, используемые в доказательствах следующих за ними теорем.

T1.4.1. $P \equiv (P \wedge P)$

T1.4.2. $(P \vee - P)$

T1.4.3. $P_1 \supset (P_2 \supset (P_1 \wedge P_2))$

T1.4.4. $((P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee P_3)) \equiv (P_1 \vee (P_2 \wedge P_3))$

T1.4.5. $P_1 \supset (P_1 \vee P_2)$

T1.4.6. $P_1 \supset ((P_2 \vee P_3) \supset ((P_1 \wedge P_2) \vee P_3))$

T1.4.7. $-(P_1 \vee P_2) \equiv (-P_1 \wedge - P_2)$

Имеются свойства ассоциативности и перестановочности конституентов конъюнкции и дизъюнкции для T.F.-формул.

Доказательства

T1.5.1. $\lceil P \equiv P$

Доказательство.

1.	$P \equiv (\mid P \wedge P)$	T1.4.1., T1.2.1., п.з.э.
2.	$P \equiv (\mid P \wedge - - P)$	1, T1.1.2., п.з.э.
3.	$\lceil P \equiv (\mid P \wedge - - P)$	T1.3.1.1
4.	$\lceil P \equiv P$	2, 3, п.з.э.

T1.5.2. $(\mid A \supset A)$

Доказательство.

1.	$-(\mid A \wedge -A)$	T1.3.2.2.
2.	$(- \mid A \vee - -A)$	1, T1.1.3.
3.	$(- \mid A \vee \mid A)$	T1.4.2., перест.
4.	$(- \mid A \vee \mid A) \wedge (- \mid A \vee - -A))$	2, 3, T1.4.3., MP
5.	$(- \mid A \vee (\mid A \wedge - -A))$	4, T1.4.4., MP
6.	$(- \mid A \vee \lceil A)$	5, T1.3.1.1, п.з.э.

7. $(-|A \vee | \ulcorner A)$ 6, T1.2.1., п.з.э.
8. $\ulcorner |A \equiv |A$ T1.5.1.
9. $(-\ulcorner |A \vee | \ulcorner A)$ 7, 8, п.з.э.
10. $|(\ulcorner |A \to \ulcorner A)$ 9, A2.1.
11. $(\ulcorner |A \to \ulcorner A)$ 10, T1.2.1.
12. $(|A \supset A)$ 11, D1.3.2

T1.6.1. $(A \to (B \to A))$

Доказательство.

1. $(|A \vee -A)$ T1.3.2.1.
2. $((|A \vee -A) \vee -B)$ 1, T1.4.5., MP
3. $(-A \vee (-B \vee |A))$ 2, ассоц., перест.
4. $(-A \vee |(B \to A))$ 3, A2.1., п.з.э.
5. $|(A \to (B \to A))$ 4, A2.1., п.з.э.
6. $(A \to (B \to A))$ 5, T1.5.2., MP

T1.6.2. $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

Доказательство.

1. $(|C \vee -C)$ T1.3.2.1.
2. $(|C \vee -C) \vee (-B \vee -A)$ 1, T1.4.5., MP
3. $(-C \vee -B) \vee (|C \vee -A)$ ассоц, перест.
4. $(|B \vee -B)$ T1.3.2.1.
5. $((|B \vee -B) \wedge (-C \vee -B)) \vee (|C \vee -A)$ 3, 4, T1.4.6., MP
6. $((|B \vee -B) \wedge (-C \vee -B)) \equiv ((|B \wedge -C) \vee -B)$ T1.4.4.
7. $((|B \wedge -C) \vee -B) \vee (|C \vee -A)$ 5, 6, п.з.э.
8. $((|B \wedge -C) \vee -A) \vee (-B \vee |C)$ 7, перест. ассоц.
9. $(|A \vee -A)$ T1.3.2.1.
10. $((|A \vee -A) \wedge ((|B \wedge -C) \vee -A)) \vee (-B \vee |C)$ 8, 9 T1.4.6., MP
11. $((|A \vee -A) \wedge ((|B \wedge -C) \vee -A)) \equiv ((|A \wedge |B \wedge -C) \vee -A)$ T1.4.4.
12. $((|A \wedge |B \wedge -C) \vee -A) \vee (-B \vee |C)$ 11, перест., п.з.э.
13. $((|A \wedge |B \wedge -C) \vee |C) \vee (-B \vee -A)$ 10, ассоц. перест.
14. $((|A \wedge |B \wedge -C) \vee |C) \vee ((|A \vee -A) \wedge (-B \vee -A))$ 9, 13, T1.4.6., MP
15. $((|A \vee -A) \wedge (-B \vee -A)) \equiv ((|A \wedge -B) \vee -A)$ T1.4.4.
16. $(|A \wedge |B \wedge -C) \vee |C \vee ((|A \wedge -B) \vee -A)$ 14, 15, п.з.э.

17.	$(|A \wedge (|B \wedge -C)) \vee ((|A \wedge -B) \vee (-A \vee |C))$	16, ассоц. перест.
18.	$(|A \wedge -(B \to C)) \vee (-(A \to B) \vee |(A \to C))$	17, A2.2., A2.1.
19.	$-(A \to (B \to C)) \vee |((A \to B) \to (A \to C))$	18, A2.1., A2.2.
20.	$|((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$	19, A2.1.
21.	$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$	20, T1.5.2.

T1.6.3. $((\sim A \to \sim B) \to (B \to A))$

Доказательство.

1.	$(|A \vee -A)$	T1.3.2.1.
2.	$((|A \vee -A) \vee -B)$	1, T1.4.5., MP
3.	$((-A \vee -B) \vee |A)$	2, перест., ассоц.
4.	$(|B \vee -B)$	T1.3.2.1.
5.	$(((-A \vee -B) \wedge (|B \vee -B)) \vee |A)$	3, 4, T1.4.6., MP
6.	$((-A \vee -B) \wedge (|B \vee -B)) \equiv ((-A \wedge |B) \vee -B)$	T1.4.4.
7.	$(-A \wedge |B) \vee -B \vee |A$	5, 6, п.з.э.
8.	$((|\sim A \wedge - \sim B) \vee (-B \vee |A))$	7, T1.3.4., D1.3.1., п.з.э.
9.	$(-(\sim A \to \sim B) \vee |(B \to A))$	8, A2.2., A2.1., п.з.э.
10.	$|((\sim A \to \sim B) \to (B \to A))$	9, A2.1.
11.	$((\sim A \to \sim B) \to (B \to A))$	10, T1.5.2.

T1.6.4. $(A \to B) \supset (A \supset B)$

Доказательство.

1.	$(\lceil B \vee -\lceil B)$	T1.4.2.
2.	$(\lceil B \vee -\lceil B) \vee -\lceil A$	1, T1.4.5., MP
3.	$\lceil B \vee (-|B \vee -B) \vee (-|A \vee -A)$	2, T1.3.1.2., п.з.э.
4.	$(-B \vee -|A) \vee ((-A \vee -|B) \vee \lceil B)$	3, перест, ассоц.
5.	$(|A \vee -|A)$	T1.4.2.
6.	$((|A \vee -|A) \wedge (-B \vee -|A)) \vee ((-A \vee -|B) \vee \lceil B)$	4, 5, T1.4.6. MP
7.	$((|A \vee -|A) \wedge (-B \vee -|A)) \equiv (|A \wedge -B) \vee -|A$	T1.4.4., перест.
8.	$(|A \wedge -B) \vee -|A \vee (-A \vee -|B) \vee \lceil B$	6, 7, п.з.э.
9.	$(-A \vee -|B) \vee ((|A \wedge -B) \vee -|A \vee \lceil B)$	8, перест., ассоц.

10. $((-A \vee --A)$ T1.4.2.

11. $((-A \vee --A) \wedge (-A \vee - |B)) \vee ((|A \wedge -B) \vee - |A \vee \lceil B)$ 7, 8, T1.4.6. MP

12. $((-A \vee --A) \wedge (-A \vee - |B)) \equiv ((--A \wedge - |B) \vee -A)$ T1.4.4., пер.

13. $(--A \wedge - |B) \vee -A \vee (|A \wedge -B) \vee - |A \vee \lceil B$ 11, 12, п.з.э.

14. $(--A \wedge - |B) \vee (|A \wedge -B) \vee (- |A \vee -A) \vee \lceil B$ 13, пер., ассоц.

15. $-(-A \vee |B) \vee (|A \wedge -B) \vee (- |A \vee -A) \vee \lceil B$ 14, T1.4.7., п.з.э.

16. $-(-A \vee |B) \vee (|A \wedge -B) \vee -\lceil A \vee \lceil B$ 15,T1.3.1.2., п.з.э.

17. $(-|(A \to B) \vee -(A \to B)) \vee -\lceil A \vee \lceil B$ 16, A2.1., A2.2.

18. $-\lceil(A \to B) \vee (-\lceil A \vee \lceil B))$ 17, T1.3.1.2., п.з.э.

19. $-\lceil(A \to B) \vee (-\lceil A \vee |\lceil B))$ 18, T1.2.1., п.з.э.

20. $-\lceil(A \to B) \vee |(\lceil A \to \lceil B))$ 19, A2.1., п.з.э.

21. $(\lceil A \to \lceil B) \equiv \lceil(\lceil A \to \lceil B)$ T1.5.1.

22. $-\lceil(A \to B) \vee |\lceil(\lceil A \to \lceil B))$ 20, 21, п.з.э.

23. $|(\lceil(A \to B) \to \lceil(\lceil A \to \lceil B))$ 22, A2.1.

24. $(\lceil(A \to B) \to \lceil(A \supset B))$ 23, T1.5.2.

25. $(A \to B) \supset (A \supset B)$ 24, D1.4.1.

Производное правило вывода

$$\frac{A, (A \to B)}{B}.$$

Доказательство.

1. A, Посылка
2. $(A \to B)$ Посылка
3. $(A \to B) \supset (A \supset B)$ T1.6.4.
4. $(A \supset B)$ 2, 3, MP
5. B 1, 4, MP

T1.6.5 $-A \leftrightarrow \sim A$.

Доказательство.

1.	$(- -A \vee -A)$	T1.4.2., перест.
2.	$(- -A \vee \mid \sim A)$	1, T1.3.4., п.з.э.
3.	$(\mid A \vee -A))$	T1.3.2.1.
4.	$\mid -A \equiv -A$	T1.2.2.
5.	$(\mid A \vee \mid -A))$	3, 4, п.з.э.
6.	$(- \sim A \vee \mid -A))$	5, D1.3.1.
7.	$(- -A \vee \mid \sim A) \wedge (- \sim A \vee \mid -A))$	2, 6, T1.4.3., MP
8.	$(\mid (-A \to \sim A) \wedge \mid (\sim A \to -A))$	7, A2.1.
9.	$(\mid (-A \to \sim A) \wedge - \sim (\sim A \to -A))$	8, D1.3.1.
10.	$-((-A \to \sim A) \to \sim (\sim A \to -A))$	9, A2.2.
11.	$\mid \sim ((-A \to \sim A) \to \sim (\sim A \to -A))$	10, T1.3.4.
12.	$\sim ((-A \to \sim A) \to \sim (\sim A \to -A))$	11, T1.5.2., MP
13.	$((-A \to \sim A) \mathbin{\&} (\sim A \to -A))$	12, D1.2.1.
14.	$-A \leftrightarrow \sim A$	13, D1.2.3.

Доказательство теорем T1.7.1. - T1.8.2.2. сводится к проверке посредством таблиц истинности, что является следствием MT3.

Теоремы $\mathbf{FL2}_{T\leftrightarrow}$

T1.9.1. $P \equiv \ulcorner P$

Доказательство.

1.	$P \equiv (\mid \mid P \wedge P)$	T1.4.1., A1.4., п.з.э. дважды
2.	$P \equiv (\mid \mid P \wedge - - P)$	1, T1.1.2., п.з.э.
3.	$-(\mid P \to - P) \equiv (\mid \mid P \wedge - - P)$	A2.2.
4.	$P \equiv -(\mid P \to - P)$	2, 3, п.з.э.
5.	$P \equiv \ulcorner P$	4, D1.3.2.

T.1.9.2. $(A \supset \mid A)$

Доказательство.

1.	$(\mid A \vee - \mid A)$	T1.4.2.
2.	$((\mid A \vee - \mid A) \vee - A)$	1, T1.4.5., MP
3.	$((- \mid A \vee - A) \vee \mid A)$	2, перест, ассоц.

4. $(-\lceil A \lor |A)$ — 3, T1.3.1.2., п.з.э.
5. $\lceil |A \equiv |A)$ — T1.9.1.
6. $(-\lceil A \lor \lceil |A)$ — 4, 5, п.з.э.
7. $|\lceil |A \equiv \lceil |A)$ — A1.4.
8. $(-\lceil A \lor |\lceil |A)$ — 6, 7, п.з.э.
9. $|(\lceil A \to \lceil |A)$ — 8, A2.1.
10. $|(\lceil A \to \lceil |A) \equiv (\lceil A \to \lceil |A)$ — A1.4.
11. $(\lceil A \to \lceil |A)$ — 9, 10, п.з.э.
12. $(A \supset |A)$ — 11, D1.4.1.

1.9.3. $(A \supset --A)$

Доказательство.

1. $(-A \lor --A)$ — T1.4.2.
2. $((-A \lor --A) \lor -|A)$ — 1, T1.4.5., MP
3. $((-|A \lor -A) \lor --A)$ — 2, перест, ассоц.
4. $(-\lceil A \lor --A)$ — 3, T1.3.1.2., п.з.э.
5. $\lceil --A \equiv --A)$ — T1.9.1.
6. $(-\lceil A \lor \lceil --A)$ — 4, 5, п.з.э.
7. $|\lceil --A \equiv \lceil --A)$ — A1.4.
8. $(-\lceil A \lor |\lceil --A)$ — 6, 7, п.з.э.
9. $|(\lceil A \to \lceil --A)$ — 8, A2.1.
10. $|(\lceil A \to \lceil --A) \equiv (\lceil A \to \lceil --A)$ — A1.4.
11. $(\lceil A \to \lceil --A)$ — 9, 10, п.з.э.
12. $(A \supset --A)$ — 11, D1.4.1.

1.9.4. $|{\sim}A \equiv -A$.

Доказательство

1. $-f(s) \supset (-A \equiv (-A \lor f(s)))$ — T1.1.6.
2. $-A \equiv (-A \lor f(s))$ — 1, T1.3.3., MP
3. $|f(s) \equiv f(s)$ — A1.4.
4. $-A \equiv (-A \lor |f(s))$ — 2, 3, п.з.э.
5. $|(A \to f(s)) \equiv (-A \lor |f(s))$ — A2.1.
6. $|(A \to f(s)) \equiv -A$ — 4, 5, п.з.э.
7. $|{\sim}A \equiv -A$ — 6, D1.1.2.

T.1.10.1. $|(A \to |A)$

Доказательство

1.	$\mid A \leftrightarrow A$	$A3_{T\leftrightarrow}$
2.	$((\mid A \to A) \,\&\, (A \to \mid A))$	1, D1.2.3.
3.	$\sim ((\mid A \to A) \to \sim (A \to \mid A))$	2, D1.2.1.
4.	$\mid \sim ((\mid A \to A) \to \sim (A \to \mid A))$	3, T.1.9.2., MP
5.	$-((\mid A \to A) \to \sim (A \to \mid A))$	4, T1.9.4.
6.	$(\mid (\mid A \to A) \wedge - \sim (A \to \mid A))$	5, A2.2.
7.	$(\mid (\mid A \to A) \wedge \mid (A \to \mid A))$	6, D1.3.1.
8.	$(\mid A \to A) \wedge \mid (A \to \mid A))$	7, A1.4.
9.	$\mid (A \to \mid A)$	8, T1.1.8., MP

T.1.10.2. $--(\mid A \to A)$

Доказательство

1.	$\mid A \leftrightarrow A$	$A3_{T\leftrightarrow}$
2.	$((\mid A \to A) \,\&\, (A \to \mid A))$	1, D1.2.3.
3.	$\sim ((\mid A \to A) \to \sim (A \to \mid A))$	2, D1.2.1.
4.	$---\sim ((\mid A \to A) \to \sim (A \to \mid A))$	3, T.1.9.3., MP
5.	$-\mid ((\mid A \to A) \to \sim (A \to \mid A))$	4, D1.3.1.
6.	$-(-(\mid A \to A) \vee \mid \sim (A \to \mid A))$	5, A2.2.
7.	$-(-(\mid A \to A) \vee -(A \to \mid A))$	6, T1.9.4.
8.	$--(\mid A \to A) \wedge --(A \to \mid A))$	7, A1.4.
9.	$--(\mid A \to A)$	8, T1.1.7., MP

T.1.11.1. $(\mid A \vee -A)$

Доказательство

1.	$\mid (A \to \mid A)$	T.1.10.1.
2.	$(-A \vee \mid \mid A)$	1, A2.1.
3.	$\mid \mid A \equiv \mid A$	A1.4.
4.	$(-A \vee \mid A)$	2, 3, п.з.э.
5.	$(\mid A \vee -A)$	4, перест.

T.1.11.2. $-(\mid A \wedge -A)$

Доказательство

1.	$--(\mid A \to A)$	T.1.10.2.
2.	$-(\mid \mid A \wedge -A)$	1, A2.2.
3.	$\mid \mid A \equiv \mid A$	A1.4.

4. $-(\,|A \wedge -A)$ — 2, 3, п.з.э.

T.1.11.3. $(|A \veebar - A)$

Доказательство

1. $(|A \vee -A)$ — T.1.11.1.
2. $-(|A \wedge -A)$ — T.1.11.2.
3. $(|A \vee -A) \wedge -(\,|A \wedge -A)$ — 1, 2, T1.4.3.
4. $(|A \veebar - A)$ — 3, D1.4.5.

Приложение 2

Для доказательства Леммы 1, предшествующей теореме о семантической полноте, будут использоваться следующие теоремы.

Отметим, что доказательства теорем **FL4** аналогичны доказательствам теорем из Приложения 1. Отличие лишь в том, что в **FL4** отсутствует аксиома А3.

T2.8.1.a $(\lceil A \supset \rceil -A)$

Доказательство

$(|A \wedge - -A) \supset - -A$

$\lceil A \supset - -A$

$\lceil A \supset \rceil -A)$

T2.8.1.b $(\rceil A \supset \lceil -A)$

Доказательство

$(-|A \wedge -A) \supset -A$

$(\rceil A \supset -A)$

$(\rceil A \supset \lceil -A)$

T2.8.1.c $(\lfloor A \supset \lceil -A)$

Доказательство

$(|A \wedge -A) \supset -A$

$\lfloor A \supset -A$

$\lfloor A \supset \lceil -A$

T2.8.1.d $(\rfloor A \supset \rceil -A)$

Доказательство

$(-|A \wedge - -A) \supset - -A$

$\rfloor A \supset - -A$

$\rfloor A \supset \rceil -A$

T2.8.2.a $\lceil C \supset \lceil (B \to C)$

Доказательство

$\lceil C \supset (\lceil C \vee \rceil B \vee (-B \wedge - -C) \vee (|C \wedge - | B))$

$\lceil C \supset ((\rceil B \vee \lceil C) \vee (-B \wedge - -C) \vee (|C \wedge - | B))$

$\lceil C \supset \lceil (B \to C)$

T2.8.2.1.b $(\lceil B \supset (\rceil C \supset \rceil (B \to C)))$

Доказательство

$(\lceil B \supset (\rceil C \supset (\rceil C \wedge \lceil B))$

$(\lceil B \supset (\rceil C \supset (\rceil C \wedge - -B \wedge |B))$

$(\lceil B \supset (\rceil C \supset (- -B \wedge - |C \wedge |B \wedge -C))$

$(\lceil B \supset (\rceil C \supset ((- -B \wedge - |C) \wedge (|B \wedge -C))))$

$(\lceil B \supset (\rceil C \supset (- (-B \vee |C) \wedge (|B \wedge -C))))$

$(\lceil B \supset (\rceil C \supset (- |(B \to C) \wedge -(B \to C))))$

$(\lceil B \supset (\rceil C \supset \rceil (B \to C)))$

T2.8.2.1.c $(\lceil B \supset (\lfloor C \supset \lfloor (B \to C)))$

Доказательство

$(-P_1 \vee P_2 \vee -P_3 \vee - P_4 \vee (P_1 \wedge (P_2 \vee P_3) \wedge P_4)))$

$((-P_1 \vee P_2) \vee (-P_3 \vee - P_4) \vee ((P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \wedge P_4)))$

$((- | B \vee -B) \vee (-|C \vee - -C) \vee ((-B \vee |C) \wedge (|B \wedge -C)))$

$((- | B \vee -B) \vee (-|C \vee - -C) \vee ((-B \vee |C) \wedge (|B \wedge -C)))$

$((- | B \vee -B) \vee (-(|C \wedge -C) \vee ((-B \vee |C) \wedge (|B \wedge -C)))$

$(\lceil B \supset (-(|C \wedge -C) \vee ((-B \vee |C) \wedge (|B \wedge -C)))$

$(\lceil B \supset (\lfloor C \supset ((-B \vee |C) \wedge (|B \wedge -C)))$

$(\lceil B \supset (\lfloor C \supset (|(B \to C) \wedge - (B \to C))$

$(\lceil B \supset (\lfloor C \supset \lfloor (B \to C))$

Доказательство остальных теорем аналогично предшествующим.

T2.8.2.1.d $(\lceil B \supset (\rfloor C \supset \rfloor (B \to C)))$

T2.8.2.2 $(\rceil B \supset \lceil (B \to C))$

T2.8.2.3.b $\vdash (\lfloor B \supset (\rceil C \supset \lfloor (B \to C)))$

T2.8.2.3.c $\vdash (\lfloor B \supset (\lfloor C \supset \lfloor (B \to C)))$

T2.8.2.3.d $\vdash (\lfloor B \supset (\rfloor C \supset \lceil (B \to C)))$

T2.8.2.4.b $\vdash (\rfloor B \supset (\rceil C \supset \rfloor (B \to C)))$

T2.8.2.4.c $\vdash (\rfloor B \supset (\lfloor C \supset \lceil (B \to C)))$

T2.8.2.4.d $\vdash (\rfloor B \supset (\rfloor C \supset \rfloor (B \to C)))$

T2.8.2.1.d $(\ulcorner B \supset (\lrcorner C \supset \lrcorner(B \rightarrow C)))$
T2.8.2.2 $(\urcorner B \supset \ulcorner(B \rightarrow C))$
T2.8.2.3.b $(\llcorner B \supset (\urcorner C \supset \llcorner(B \rightarrow C)))$
T2.8.2.3.c $(\llcorner B \supset (\llcorner C \supset \llcorner(B \rightarrow C)))$
T2.8.2.3.d $(\llcorner B \supset (\lrcorner C \supset \ulcorner(B \rightarrow C)))$
T2.8.2.4.b $(\lrcorner B \supset (\urcorner C \supset \lrcorner(B \rightarrow C)))$
T2.8.2.4.c $(\lrcorner B \supset (\llcorner C \supset \ulcorner(B \rightarrow C)))$
T2.8.2.4.d $(\lrcorner B \supset (\lrcorner C \supset \lrcorner(B \rightarrow C)))$

Лемма 1. *Пусть* A есть ппф, $S_1, S_2, ..., S_n$ есть *попарно различные переменные, входящие в* A, *и для* $S_1, S_2, ..., S_n$ *задано некоторое распределение истинностных значений. Пусть для всякой* ппф B:

B′ *есть* $\ulcorner$B, *если* B *принимает значение* T,
B′ *есть* $\urcorner$B, *если* B *принимает значение* F,
B′ *есть* $\llcorner$B, *если* B *принимает значение* B,
B′ *есть* $\lrcorner$B, *если* B *принимает значение* N.

Тогда $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash A'$.

Доказательство. Доказательство ведется индукцией по числу n вхождений исходных связок в формулу A, которая записана без сокращений.

При n=0 A является одной из переменных S_i и в этом случае A′ есть S_i'.

Из метатеоремы T2.1.1 следует $S_i' \vdash S_i'$, отсюда следует $S_i' \vdash A'$

Введем теперь индуктивное допущение (и.д.), состоящее в том, что лемма верна для всякого j, которое меньше m $(j < m)$.

Случай 1. A имеет вид (–B). При этом число вхождений исходных связок в B меньше n.

Случай 1.a. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение T. Тогда A принимает значение F.

Таким образом, B′ есть $\ulcorner$B, и A′ есть $\urcorner$A.

По и.д., примененному к B мы имеем $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash B'$, то есть $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \ulcorner B$.

Отсюда по теореме T2.8.1.a и MP $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \urcorner{-}B$.

Но $\rceil{-}B$ и есть A'.

Случай 1b. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение F. Тогда A принимает значение T.

Таким образом, B' есть $\rceil B$, и A' есть $\lceil A$.

По и.д., примененному к B мы имеем $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash B'$, то есть $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \rceil B$.

Отсюда по теореме T2.8.1.b и MP $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \lceil{-}B$.

Но $\lceil{-}B$ и есть A'.

Случай 1c. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение B. Тогда A принимает значение T.

Таким образом, B' есть $\lfloor B$, и A' есть $\lceil A$.

По и.д., примененному к B мы имеем $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash B'$, то есть $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \lfloor B$.

Отсюда по теореме T2.8.1.c и MP $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \lceil{-}B$.

Но $\lceil{-}B$ и есть A'.

Случай 1d. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение N. Тогда A принимает значение F.

Таким образом, B' есть $\rfloor B$, и A' есть $\rceil A$.

По и.д., примененному к B мы имеем $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash B'$, то есть $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \rfloor B$.

Отсюда по теореме T2.8.1.d и MP $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \rceil{-}B$.

Но $\rceil{-}B$ и есть A'.

Случай 2. A имеет вид: $(B \to C)$.

Число вхождений исходных связок в B и в C меньше n.

Случай 2.a. Пусть при заданном распределении истинностных значений C принимает значение T. Тогда A принимает значение T.

Таким образом, C' есть $\lceil C$, а A' есть $\lceil A$ (то есть $\lceil(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash C'$,
то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \lceil C$.

Отсюда, из 1) и T2.8.2.a по MP получаем
$S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \lceil(B \to C)$.

Но $\lceil(B \to C)$ и есть A'.

Случай 2.1.a. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение T и C принимает значение T. Сводится к 2.a.

Случай 2.1.b. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение T и C принимает значение F. Тогда A принимает значение F.

Таким образом, B' есть $\ulcorner B$ и C' есть $\urcorner C$, а A' есть $\urcorner A$ (то есть $\urcorner(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем

$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash B'$ и $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash C'$,

то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \ulcorner B$ и

2) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \urcorner C$.

Отсюда, из 1), 2) и T2.8.2.1.b по MP получаем

$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \urcorner(B \to C)$.

Но $\urcorner(B \to C)$ и есть A'.

Случай 2.1.c. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение T и C принимает значение B. Тогда A принимает значение B.

Таким образом, B' есть $\ulcorner B$ и C' есть $\llcorner C$, а A' есть $\llcorner A$ (то есть $\llcorner(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем

$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash B'$ и $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash C'$,

то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \ulcorner B$ и

2) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \llcorner C$.

Отсюда, из 1), 2) и T2.8.2.1.c по MP получаем

$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \llcorner(B \to C)$.

Но $\llcorner(B \to C)$ и есть A'.

Случай 2.1.d. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение T и C принимает значение N. Тогда A принимает значение N.

Таким образом, B' есть $\ulcorner B$ и C' есть $\lrcorner C$, а A' есть $\lrcorner A$ (то есть $\lrcorner(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем

$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash B'$ и $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash C'$,

то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \ulcorner B$ и

2) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \lrcorner C$.

Отсюда, из 1), 2) и T2.8.2.1.d по MP получаем

$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \lrcorner(B \to C)$.

Но $\rfloor(B \to C)$ и есть A'.

Случай 2.2. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение F. Тогда A принимает значение T.

Таким образом, B' есть $\rceil B$, а A' есть $\lceil A$ (то есть $\lceil(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash B'$, то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \rceil B$.

Отсюда, из 1) и T2.8.2.2 по MP получаем

$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \lceil(B \to C)$.

Но $\lceil(B \to C)$ и есть A'.

Случай 2.2.a. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение F и C принимает значение T. Сводится к 2.2.

Случай 2.2.b. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение F и C принимает значение F. Сводится к 2.2.

Случай 2.2.c. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение F и C принимает значение B. Сводится к 2.2.

Случай 2.2.d. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение F и C принимает значение N. Сводится к 2.2.

Случай 2.3.a. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение B и C принимает значение T. Сводится к 2.a.

Случай 2.3.b. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение B и C принимает значение F. Тогда A принимает значение B.

Таким образом, B' есть $\lfloor B$ и C' есть $\rceil C$, а A' есть $\lfloor A$ (то есть $\lfloor(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем

$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash B'$ и $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash C'$,

то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \lfloor B$ и

2) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \rceil C$.

Отсюда, из 1), 2) и T2.8.2.3.b по MP получаем

$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \lfloor(B \to C)$.

Но $\lfloor(B \to C)$ и есть A'.

Случай 2.3.c. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение B и C принимает значение B. Тогда A принимает значение B.

Таким образом, B′ есть $\llcorner$B и C′ есть $\llcorner$C, а A′ есть $\llcorner$A (то есть $\llcorner(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем
$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash B'$ и $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash C'$,
то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \llcorner B$ и
2) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \llcorner C$.

Отсюда, из 1), 2) и T2.8.2.3.c по MP получаем
$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \llcorner(B \to C)$.

Но $\llcorner(B \to C)$ и есть A′.

Случай 2.3.d. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение B и C принимает значение N. Тогда A принимает значение T.

Таким образом, B′ есть $\llcorner$B и C′ есть $\lrcorner$C, а A′ есть $\ulcorner$A (то есть $\ulcorner(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем
$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash B'$ и $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash C'$,
то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \llcorner B$ и
2) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \lrcorner C$.

Отсюда, из 1), 2) и T2.8.2.3.d по MP получаем
$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \ulcorner(B \to C)$.

Но $\ulcorner(B \to C)$ и есть A′.

Случай 2.4.a. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение N и C принимает значение T. Сводится к 2.a.

Случай 2.4.b. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение N и C принимает значение F. Тогда A принимает значение N.

Таким образом, B′ есть $\lrcorner$B и C′ есть $\urcorner$C, а A′ есть $\lrcorner$A (то есть $\lrcorner(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем
$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash B'$ и $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash C'$,
то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \lrcorner B$ и
2) $S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \urcorner C$.

Отсюда, из 1), 2) и T2.8.2.4.b по MP получаем
$S'_1, S'_2, ..., S'_n \vdash \lrcorner(B \to C)$.

Но $\rfloor(B \to C)$ и есть A'.

Случай 2.4.c. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение **N** и C принимает значение **B**. Тогда A принимает значение **T**.

Таким образом, B' есть $\rfloor B$ и C' есть $\lfloor C$, а A' есть $\lceil A$ (то есть $\lceil(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash B'$ и $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash C'$,

то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \rfloor B$ и

2) $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \lfloor C$.

Отсюда, из 1), 2) и T2.8.2.4.c по MP получаем

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \lceil(B \to C)$.

Но $\lceil(B \to C)$ и есть A'.

Случай 2.4.d. Пусть при заданном распределении истинностных значений B принимает значение **N** и C принимает значение **N**. Тогда A принимает значение **N**.

Таким образом, B' есть $\rfloor B$ и C' есть $\rfloor C$, а A' есть $\rfloor A$ (то есть $\rfloor(B \to C)$).

По и.д., применяемому к B и C, мы имеем

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash B'$ и $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash C'$,

то есть в данном случае 1) $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \rfloor B$ и

2) $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \rfloor C$.

Отсюда, из 1), 2) и T2.8.2.4.d по MP получаем

$S'_1, S'_2, \ldots, S'_n \vdash \rfloor(B \to C)$.

Но $\rfloor(B \to C)$ и есть A'.

Этим завершается доказательство леммы.

Литература

[*Анисов А.М.* 1997] Семантика неопределенности // Логические исследования. Выпуск 4, М., С.271-289.

[*Аншаков О.М.* 1998] J-логики и соответствуюшие им классы алгебр // Логические исследования. Вып. 5. М., С.25-52.

[*Аристотель* 1976] Сочинения в четырех томах. Т. 1., М.

[*Арруда А.* 1989] Воображаемая логика Васильева // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М.

[*Белнап Н.* 1981] Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов, М.

[*Бочвар Д.А.* 1938] Об одном трехзначном исчислении // Математический сборник. Т.4. N2.

[*Бродский И.Н.* 1973] Отрицательные высказывания, Ленинград.

[*Васильев Н.А.* 1912] Воображаемая (неаристотелева) логика // Журн. м-ва нар. просвещения Ч. 40. С.207-246.

[*Васильев Н.А.* 1989] Воображаемая логика (конспект лекции) // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М.

[*Васильев Н.А.* 1989] Воображаемая (неаристотелева) логика // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М.

[*Войшвилло Е.К.* 1983] Семантика релевантных логик // Разум и культура. МГУ.

[*Вригт Г.Х. фон* 1986] Логика истины // Вригт Г.Х. Логико-философские исследования. М.

[*Гильберт Д., Бернайс П.* 1979] Основания математики М.

[*Ивлев Ю.В.* 1991] Модальная логика М.

[*Зиновьев А.А.* 1971] Логика науки М.

[*Карпенко А.С.* 1990] Фатализм и случайность будущего: логический анализ М.

[*Карпенко А.С.* 1997] Многозначные логики М.

[*Карпенко А.С.* 2002] ЛОЖЬ // Философская энциклопедия

[*Карнап Р.* 1998] Преодоление метафизики логическим анализом языка // Аналитическая философия: становление и развитие. М.

[*Карри Л.И.* 1969] Основания математической логики. М.

[*Клини С.К.* 1957] Введение в метаматематику М.

[*Лукасевич Я.* 1993] О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М.,. С. 190-205.

[*Маркин В.И.* 2000] Погружение воображаемой логики Н.А.Васильева в кванторную трехзначную логику // Логические исследования. Выпуск 7, М.

[*Павлов С.А.* 1979] Исчисление предикатов истинности и ложности. // Логический анализ естественных языков. 2-й Советско-Финский коллоквиум по логике. М.

[*Павлов С.А.* 1990] Логика с терминами 'истинно' и 'ложно' // Философские основания неклассических логик. Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР. М.

[*Павлов С.А.* 1990] Логика ложности // X Всесоюзная конференции по логике, методологии и философии науки, Тезисы, (секции 1-5), Минск, С. 82-83.

[*Павлов С.А.* 1994] Логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. 1993. М., С. 14-35

[*Павлов С.А.* 1992] Значения истинности в тетралектике // Истины и ценности на рубеже XX-XXI веков (материалы симпозиума). М., С. 168-170.

[*Павлов С.А.* 1995] Классификация трех- и четырехзначных логик в рамках логики ложности FL4 // Логические исследования. Выпуск 3, М., С. 98-122.

[*Павлов С.А.* 1997] Логика высказываний и событий и логика ложности // Международная конференция “Смирновские чтения” М., С. 65.

[*Павлов С.А.* 1997] Итоги и перспективы исследования логик истинности и ложности // Международная конференция “Развитие логики в России: Итоги и перспективы”. М., С. 38-41.

[*Павлов С.А.* 1997] Трехзначная логика Лукасевича и логика ложности FL4 // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М.

[*Павлов С.А.* 1998] Отрицания в логике ложности // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы V Общероссийской научной конференции С-Пб., С.264-267.

[*Павлов С.А.* 1998] Логика ложности как обобщение трехзначной логики Лукасевича // Логические исследования. Выпуск 5, М., С.206-220.

[*Павлов С.А.* 1999] Метапредикат истинности и логика ложности // Логические исследования. Выпуск 6, М., С.170-185.

[*Павлов С.А.* 1999] Исчисление предикатов истинности и ложности: четверть века спустя // 2 Международная конференция "Смирновские чтения". М., С. 62-65.

[*Попов В.М.* 1979] Аналитические формулировки и модели Крипке некоторых пропозициональных логик первопорядкового следования // Релевантные логики и теории следования. // 2-й Советско-финский коллоквиум по логике М.

[*Сидоренко Е.А.* 2000] Релевантная логика (предпосылки, исчисления, семантика) М.

[*Смальян Р.* 1981] Теория формальных систем. М.

[*Смирнов В.А.* 1986] Утверждение и предикация. Логика высказываний и событий // Нестандартные семантики неклассических логик. М.

[*Смирнов В.А.* 1989] Комбинированные исчисления предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. IV Советско-финский коллоквиум. М.

[*Смирнова Е.Д.* 1986] Логическая семантика и философские основания логики. М.

[*Смирнова Е.Д.* 1996] Логика и философия. М.

[*Тарский А.* 1999] Понятие истины в языках дедуктивных наук. // Философия и логика Львовско-Варшавской школы. М.

[*Тарский А.* 1998] Семантическая концепция истины и основания семантики. // Аналитическая философия: становление и развитие. М.

[*Финн В.К.* 1974] О критерии функциональной полноты для B^3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М., С.194-199.

[*Хомский Н.* 1998] Синтаксические структуры // Ельмслев Л. Можно ли считать, что значения слов образуют структуру? Хомский Н. Синтаксические структуры. Благовещенск.

[*Чёрч А.* 1960] Введение в математическую логику. М.

[*Шестаков В.И.* 1964] О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений // Успехи математичесих наук Т.XIX Вып. 2 (116) С. 177-181.

[*Шестаков В.И.* 1967] О некоторых расширениях исчислений Бочвара и Клини до функционально полных трехзначных исчислений НТИ. Сер. 2.

[*Aczel P.* 1980] Frege structure and the notions of proposition, truth and set // The Kleene symposium, North Holland Studies in Logic 101, Amsterdam, pp. 31-39.

[*Asenjo F.G.* 1966] Logic of antinomies // Notre Dame J. Form. Log. V. 7, pp. 103-105.

[*Asenjo F.G., Tamburino J.* 1975] Logic of antinomies // Notre Dame J. Form. Log. Vol. 16, N1, pp. 17-44.

[*Back R.J.R.* 1986] A Computation Interpretation of Truth Logic // Synthese, v.66, N1, pp. 15-35.

[*Barwise J., Etchemendy J.* 1987] The Liar. An essay on truth and circularity. N.Y.-Oxford: Oxford University Press.

[*Da Costa N.C.A.* 1963] Calculs propositionnels pour les systemes formels inconsistans. C.R.Acad.Sc. Paris. T.251.

[*D'Ottaviano, Itala.M.L., da Çosta Newton.C.A.* 1970] Sur un probleme de Jaskovski. C.R.Acad.Sc. Paris. 270, Seria A, pp 1349-1351.

[*Dunn J.M.* 1971] An Intiuitive Semantics for First-Degree Relevant Implication // The Journal of Symbolic Logic. Vol.36. P.362 - 363.

[*Dunn J.M.* 1976] Intuitive Semantics for First-Degree Entailments and Coupled Trees // Philosophical Studies. Vol.29. P.149-168.

[*Dunn J.M.* 2000] Partiality and its Dual // Studia Logica. Vol.65. P.5-40.

[*Epstein R.L.* 1990] The Semantic Foundation of Logic. Vol. 1: Propositional Logics, Dordrecht-Boston-London.

[*Feferman S.* 1984] Towards useful type-free theories, I // The Journal of Symbolic Logic, Vol. 49, pp. 75-111.

[*Fitting M.* 1988] Bilattices and the semantics of logic programming. Preprint.

[*Gillmore P.C.* 1974] The consistency of partial set theory without extensionality // Proceedings of Simposia in Pure Mathematics, Vol. 13, part II, AMS.

[*Gödel K.* 1986] On the intuitionistic propositional calculus // Godel K. Collected Works V.1 Oxford Univ. Press.

[*Gupta A.* 1982] Truth and Paradox // Journal of Philosophical Logic Vol. 11, pp. 1-60.

[*Herzberger H.* 1982] Notes of naive semantics // Journal of Philosophical Logic Vol. 11, pp. 61-102.

[*Jaskowski, S.* 1968] Propositional calculus for contradictory deductive systems // Studia Logica v.XXIV.

[*Kripke S.* 1975] Outline of a Theory of Truth // The Journal of Philosophy, vol. 72, pp. 690-716.

[*Łukasiewicz J.* 1961] Z zagadnien logiki i filozofii. Pisma wybrane. Warszawa, S.114-126.

[*Muskens R.A.* 1989] Meaning and partiality. Amsterdam

[*Pavlov S.A.* 1993] Falsehood logic FL4 // Institute for Logic, Cognitive Science and Development of Personality, 93-04/, Moscow.

[*Pavlov S.A.* 1997] Logic For Computer Reasoning // International Conference on Informatics and Control, St. Petersburg, P.496-499.

[*Pavlov S.A.* 1998] Three-valued Lukasiewich's Logic and Falsehood Logic FL4 // Bulletin of the Section of Logic, V.27, N1/2, P.79-81.
[*Pavlov S.A.* 1998] Sentential Falsehood Logic FL4 // XX World Congress of Philosophy, Boston, 11-16 August. P.156.
[*Pavlov S.A.* 2000] Logic FL4 with Falsehood Operator // MultiValued Logics, V. 5, pp. 125-138.
[*Pawlow S.A.* 1978] Einige nichttraditionelle Ideen in der Logik // Philosophie und Naturwissenschaften in Vergangenheit und Gegenwart. Heft 5: Philosophishe Probleme der Logik, Berlin.
[*Popov V.M.* 1998] On the Logics Related to A.Arruda's System V1 // Stanislaw Jjaskowski Memorial Simposium, Torun, pp. 112-114.
[*Ed. Priest G.* 1989] Paraconsistence Logic, München.
[*Priest G.* 1979] The logic of paradox // J.Philos. Logic, Vol.8, N2.
[*Rosser J.B., Turquette A.R.* 1951] Many-valued logics. Amsterdam.– North-Holland.
[*Scott D.* 1975] Combinators and classes // Lambda Calculus and Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 37, Berlin, pp. 1-26.
[*Sette A.M.* 1973] On propositional calculus P3 // Math. Jap. Vol. 18, N 3, pp. 173-180.
[*Słupecki J., Bryll G., Prucnal T.* 1967] Some Remarks on Three-valued Logic of J. Łukasiewicz // Studia Logica.. Vol. XXI, P.45-70.
[*Tarski A.* 1933] Pojecie prawdy w jezikach nauk dedukcyjnych // Warszawa.
[*Turner R.* 1990] Logics of Truth // Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. 31, N.2, pp. 308-329.
[*Wright G.H. von* 1984] Truth and Logic // The Truth, Knowledge & Modality / Philosophical papers, vol. III, Basil Blackwell, Oxford.
[*Wright G.H. von* 1986] Truth, negation and contradiction // Synthese, v.66, N1, pp. 3-14.
[*Wright G.H. von* 1987] Truth-Logics // Logique et analyse. Nouvelle serie, Vol. 120.

Resume

A general approach to the truth and falsehood concept was developed. The main idea is, that the semantic terms are introduced directly into the object language of logic and their features are given axiomatically. The constructed logic language FL2 is double-level and allows the expression of logic laws, particularly the law of excluded middle and the contradiction law, in both semantic and non-semantic formulations. The semantic paradoxes don't appear failing in FL2 language a substitution function, which, as A.Gupta mentioned, is a necessary condition of their appearance. The developed conception and her formalization in the area of two-valued statements is as the matter of fact the axiomatic truth theory for the classical sentential logic. It is an alternative towards the semantic truth theory of Tarsky which forms the definition of the true proposition. The concerned conception is generalized on the area of the statements, which aren't two-valued, and thus non-classical logic FL4 is constructed. The logic of truth and falsehood is generalized taking into account the rejection of bivalence principle. The semantics of the language of such calculus is built, which is compared to the logical lattice FL4 for Belnap's logic. Including in consideration the truth-values meanings B (contradiction) and N (neither truth nor falsity) allows to analyse and compare acquired logic to paraconsistent and paracomplete logics. For the constructed logic FL4 the theorems of deduction, correctness, semantic completeness and soundness are proved. The four-valued logic FL4 is similar to the truth logic of von Wright. The interrelations of sublogics FL4 with the three-valued logics of Lukasiewich and Kleene are established. Logic FL4 is enriched with the universal quantifier over the sentential variables. The sequence of generalizations and enrichments of logic language ends with the widening of truth and falsehood operators definitions area at the universe of symbolic expressions. The obtained logic can be used for the artificial intelligence.

Научное издание

Павлов Сергей Афанасьевич
ЛОГИКА С ОПЕРАТОРАМИ ИСТИННОСТИ И ЛОЖНОСТИ

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

В авторской редакции
Корректура автора
Технический редактор *А.В.Сафонова*
Художник *В.К.Кузнецов*

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10 98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 6.12.2004.
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л 9,00. Уч.-изд.л. 5,31. Тираж 500 экз. Заказ № 047.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерная верстка *С.А.Павлов*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119992, Москва, Волхонка, 14.